



دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش منطق ریاضی

عنوان

رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خود ارجاعی

استاد راهنما

آقای دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

آقای دکتر جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

مهدی عابدینی

دی ۱۳۸۸

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الهی

فضل تو را کران نیست و شکر تو را زبان نیست.

الهی

دانائی ده که از راه نیفتیم و بینائی ده که در چاه نیفتیم.

الهی

دلی ده که در شکر جان بازیم و جانی ده که کار جهان سازیم.

الهی

تحقیقی ده تا از دنیا بیزار شویم و توفیقی ده در دین استوار شویم.

الهی

دلی ده که طاعت افزون کند و توفیق طاعتی که به بهشت رهنمون کند.

الهی

اگر چه گناه من افزون است اما عفو تو از حد بیرون است.

الهی

نگاهداری تا پشیمان نشویم و به راه آر که سرگردان نشویم.

الهی

چون توانستم ندانستم و چون که دانستم نتوانستم.

الهی

می بینی و می دانی و بر آوردن می توانی.

الهی

ما را پیراستی چنان که خواستی.

از مناجات نامهٔ خواجه عبدالله انصاری

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوارم

به پاس زحمات بی دریغشان

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند متّان که دوره کارشناسی ارشد را به لطف و یاری او به اتمام رساندم. در طول دوران تحصیل اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. پر واضح است که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات این بزرگواران را جبران نماید.

اما بر خود لازم می‌دانم که از استاد گرانقدرم آقای دکتر صالحی پور به خاطر زحمات بی‌شائبه و حمایت‌های بی‌نظیرشان که در سخت‌ترین لحظات تحصیل همواره پشتیبان اینجانب بوده‌اند از صمیم قلب تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از استاد بزرگوار آقای دکتر عیوضلو به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌های بی‌دریغشان، کمال تشکر و امتنان را دارم. ضمناً از استاد برجسته و گرانقدر جناب آقای دکتر ... که با لطف و عنایت خویش قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، کمال سپاس و امتنان را دارم.

از اساتید و دوستان دیگر از جمله جناب آقای دکتر مددی، آقای دکتر جعفری و آقای دکتر رنجبر که در طول دوران تحصیل مشوق اینجانب بوده‌اند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که همواره یار و حامی اینجانب بوده‌اند و با تحمل مشکلات راه تحصیل را بر من هموار نموده‌اند، نهایت امتنان را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: عابدینی	نام: مهدی
عنوان: رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خود ارجاعی	
استاد راهنما: آقای دکتر سعید صالحی پورمهر استاد مشاور: آقای دکتر جعفر صادق عیوضلو	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دی ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۳	
کلید واژه‌ها: رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خودارجاعی	
چکیده مبنای اصلی این پایان نامه مقاله زیر است: N. S. YANOFISKY, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386. در سال ۱۹۰۶ برتراند راسل با انتشار مقاله ای نشان داد همه پارادکس های نظریه مجموعه ای شناخته شده، دارای یک شکل مشترک هستند. در سال ۱۹۶۹ ویلیام لاوور^۱ از زبان نظریه رسته ها^۲ برای رسیدن به یک نظریه بنیادی و یکپارچه که نه تنها شامل پارادکس های نظریه William Lawvere^۱ Category theory^۲	

مجموعه‌ای بلکه شامل پدیده‌های ناتمامیت نیز گردد، بهره جست. لاوور دقیقاً نشان داد که چگونه رسته‌های بسته دکارتی برای ارائه دادن یک شکل مشترک از قضیه کانتور در ارتباط با اندازه مجموعه‌های توانی، پارادکس راسل، قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی و قضیه اول ناتمامیت گودل، استفاده می‌شوند.

در این پایان نامه، با یک روش توصیفی، نظرات لاوور با استفاده از زبان نظریه مجموعه‌ای ارائه و توسعه داده می‌شوند. ضمناً چگونگی ایجاد و تکوین پارادکس‌های خودارجاعی، ناتمامیت و قضایای نقطه ثابت از قضیه تعمیم یافته کانتور تشریح خواهند شد. همچنین این رویه برای پارادکس دروغگو، پارادکس گرلینگ و ریچارد، مسأله توقف تورینگ، مسأله اراکل دار $P = ? NP$ ، پارادکس سفر در زمان، گزاره‌های پریخ، پارادکس لب و قضیه رایس تعمیم داده می‌شود.

فهرست مطالب

۳	۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۲۷	۲ مباحث مقدماتی
۳۴	۳ قضیه کانتور و تعمیم آن
۳۵	۱.۳ قضیه کانتور
۳۷	۲.۳ تعمیم قضیه کانتور
۴۰	۴ نمونه هایی از قضیه کانتور
۴۱	۱.۴ قضیه کانتور
۴۲	۲.۴ پارادکس راسل
۴۴	۳.۴ پارادکس گرلینگ
۴۵	۴.۴ پارادکس دروغگو
۴۷	۵.۴ پارادکس ریچارد

۴۹	مسأله توقف تورینگ	۶.۴
۵۱	یک زبان غیر $r.e.$	۷.۴
۵۲	یک اراکل B بطوریکه $P^B \neq NP^B$	۸.۴
۵۷	پارادکس سفر در طول زمان	۹.۴

۵ قضیه قطری و نمونه هایی از قضایای قطری

۶۰	قضیه قطری	۱.۵
۶۳	لم قطری	۱.۵
۶۴	نخستین قضیه ناتمامیت گودل	۲.۵
۶۵	قضیه ناتمامیت گودل - راسر	۳.۵
۶۶	قضیه تارسکی	۴.۵
۶۷	گزاره های پریخ	۵.۵
۶۸	پارادکس لُب	۶.۵
۷۲	قضیه رایس	۷.۵
۷۳	ماشین های خودمولد وان نیومن	۸.۵

۶ جمع بندی و طرح مسائل باز

منابع مورد استفاده

واژه نامه ی تخصصی فارسی به انگلیسی

واژه نامه ی تخصصی انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف پارادکس

پارادکس این است که از مقدمه‌هایی که به ظاهر پذیرفتنی می‌نمایند با استدلالی که به ظاهر درست می‌نماید نتیجه‌ای ناپذیرفتنی بدست آید (ر.ک. [۲۸]).

البته مترجمان در ترجمه واژه‌ی پارادکس^۱ معادل‌هایی از قبیل تناقض‌نما، باطل‌نما، معما، خارق‌اجماع، تعارض در اقوال، تضاد، ناساز، تنازع و ... را جایگزین نموده‌اند. اما به نظر می‌رسد هیچ‌یک از آنها معنای دقیق پارادکس را بیان نمی‌کند. شاید به همین جهت است که برخی مترجمان ترجیح می‌دهند خود آن را بدون ترجمه در زبان فارسی بیاورند. همانطور که در بالا ذکر نمودیم، پارادکس عبارت است از بدست آوردن یک جمله‌ی غیر قابل قبول از مقدمات مقبول و قواعد استنتاجی معتبر. به همین دلیل نیز، برای حل پارادکس سعی می‌شود یا در صدق مقدمات و یا در اعتبار قواعد استنتاج خدشه وارد کرده و یا اینکه نتیجه را پذیرفته و تنها توضیح داده شود که چرا غیر قابل قبول جلوه می‌نماید. به عبارتی دیگر، می‌توان پارادکس را به این صورت تعریف نمود: آنچه که تناقض‌آمیز، باورنکردنی و خلاف انتظار و شهود ماست. یعنی آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است.

البته تنوع و تاریخچه‌ی پارادکس‌ها بسیار فراتر از گنجایش این پایان‌نامه می‌باشد. پارادکس‌ها در بستر طیف وسیعی از علوم در طول تاریخ حادث گردیده‌اند از جمله منطق، فلسفه، ریاضی، هندسه، اقتصاد، فیزیک و حتی شیمی. در این مختصر ما صرفاً به بیان چند پارادکس تاریخی و چند نمونه از پارادکس‌هایی که خاصیت خودارجاعی دارند پرداخته و به فرمول‌بندی این پارادکس‌ها بسنده می‌کنیم.

ضمناً پارادکس‌ها فوایدی نیز دارند: از جمله می‌توان به ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای

Paradox¹

دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید اشاره نمود.

در ادامه چند نمونه‌ی مشهور از پارادکس‌ها را می‌آوریم و علتی که این پارادکس‌ها ایجاد می‌شوند را شرح می‌دهیم.

پارادکس آرایشگر^۲

این پارادکس به چند شکل مختلف مطرح گردیده است که اغلب دارای یک مفهوم هستند. ما شکل عمومی تر آن را مطرح می‌کنیم. گویند در دهکده‌ای دور افتاده از سیسیل که در پشت کوه‌های سر به فلک کشیده پنهان شده است آرایشگری هست که از ساکنان دهکده تنها ریش کسانی را می‌تراشد که خود ریش خود را نمی‌تراشند: حالا سؤال این است که تکلیف این آرایشگر با ریش خود چیست؟ ریش خود را خود می‌تراشد یا نمی‌تراشد؟ فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را بتراشد. پس از کسانی است که خودشان ریش خودشان را می‌تراشند اما بنا بر تعریفی که از این آرایشگر کردیم او ریش چنین کسانی را نمی‌تراشد. پس نباید ریش خودش را بتراشد. حالا فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را نمی‌تراشد. پس بنا به تعریف چون از کسانی است که ریش خود را نمی‌تراشند پس باید ریش خود را بتراشد. وضع غریبی است. اگر ریش خود را بتراشد ریش خود را نمی‌تراشد و اگر ریش خود را نتراشد ریش خود را می‌تراشد. به اصطلاح این آرایشگر ریش خود را می‌تراشد اگر و تنها اگر ریش خود را نتراشد. و این یک تناقض است. چگونه این تناقض ایجاد شد؟

در این پارادکس دو نکته مندرج است: یکی روانشناختی و دیگری منطقی. نکته‌ی روانشناختی این است که اگر دروغی را با شرح و تفضیل و جزئیات بگویم بسیاری آن را باور می‌کنند. نکته منطقی اینکه به صرف تعریف نمی‌توان شیئی آفرید که مصداق آن تعریف باشد.

به همین دلیل وقتی منطق دانان تعریفی از عددی یا مجموعه ای می کنند پس از تعریف دو مطلب دیگر را هم ثابت می کنند: اول این که چیزی با این تعریف وجود دارد، دوم این که آن چیز موجود منحصر بفرد است. ملاحظه می کنیم که پارادکس آرایشگر سیسیلی راه حل ساده ای دارد. ابتدا فرض می کنیم که بنا به ادعای گوینده چنین آرایشگری وجود دارد. سپس از این فرض به تناقض می رسیم و نتیجه می گیریم که چنین آرایشگری وجود ندارد. این همان روش برهان خلف است. به طور خلاصه در این پارادکس دو مقدمه داریم:

۱. آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود دارد،

۲. این آرایشگر تنها ریش همه ی آن کسانی را می تراشد که ریش خود را نمی تراشند.

از این دو مقدمه نتیجه می گیریم که:

۳. این آرایشگر ریش خود را می تراشد و ریش خود را نمی تراشد.

«۳» تناقض است و نتیجه نهایی این است که مقدمه ی «۱ و ۲» را نقض کنیم و بگوییم:

۴. چنین آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود ندارد.

گاهی پارادکس به دلیل نادرستی استدلال به وجود می آید. یعنی مقدمه ها، برخلاف پارادکس آرایشگر، ایرادی ندارند اما استدلال ایراد دارد. نمونه ای از این گونه، استدلالی است که دموکران برای اثبات « $2 = 1$ » آورده است (ر.ک. [۲۸]). فرض کنید:

$$X = 1 \quad (۱)$$

حال دو طرف معادله ی فوق را در X ضرب می کنیم:

$$X^2 = X \quad (۲)$$

حال از دو طرف عدد یک را کم می کنیم:

$$X^2 - 1 = X - 1 \quad (۳)$$

می‌دانیم که:

$$X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1) \quad (۴)$$

حال با جاگذاری رابطه‌ی «۴» در «۳» داریم:

$$(X + 1)(X - 1) = X - 1 \quad (۵)$$

اکنون طرفین را بر « $X - 1$ » بخش می‌کنیم:

$$(X + 1) = 1 \quad (۶)$$

اما از «۱» می‌دانیم که $X = 1$. در «۶» به جای X عدد یک را قرار می‌دهیم:

$$2 = 1 \quad (۷)$$

ایراد کار در کجاست؟ استدلال از «۲» شروع شده و به «۷» پایان یافته است. بنابراین اگر ایرادی در کار باشد در یکی از مراحل همین استدلال است. بنابر «۱»، « $X = 1$ »، پس « $X - 1 = 0$ ». در مرحله‌ی «۶» تقسیم طرفین بر « $X - 1$ » یعنی تقسیم طرفین معادله بر صفر را انجام داده ایم و این همان کاری است که مجاز نیست. در واقع با تقسیم بر صفر کار را به اعداد بینهایت کشانده و مبهم نموده‌ایم. این یک نمونه از استدلالی است که به ظاهر درست می‌نماید، لکن در حقیقت درست نیست.

نمونه‌ای دیگر از استدلالهای نادرست، پارادکس زنون یا به عبارتی پارادکس نفی حرکت است. (ر. ک. [۲۸]) این گونه پارادکس‌ها، برخلاف ظاهر سرگرم‌کننده‌ی خود، می‌توانند دگرگونی عمیقی در مبانی اندیشه‌ی ما ایجاد کنند و فریاد هشدار می‌باشند تا فریب شعور و شهود متعارف خود را نخوریم و به خصوص در آنچه بدیهی می‌نماید با شک و تردید نگاه کنیم. پارادکسی که اکنون بدان می‌پردازیم یکی از آن فریادهای هشدار می‌باشد که منطق و ریاضی و فلسفه را در اوایل قرن بیستم به لرزه درآورد، لرزه‌ای که هنوز موج آن فرو ننشسته است.

پارادکس راسل^۳

پارادکس راسل از مهمترین پارادکس های نظریه مجموعه ها است که توسط ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی برتراند راسل در سال ۱۹۰۱ معرفی شد. این پارادکس نشان می دهد که نظریه طبیعی مجموعه های فرگه که بر پایه کارهای جرج کانتور بود، دارای تناقضاتی در درون خودش است. در نظریه طبیعی مجموعه ها دو اصل موضوع عمده وجود دارد که عبارت اند از اصل موضوع گسترش و اصل موضوع شهودی تجرید. اصل انتزاع بیان می کند، اگر $\phi(x)$ خاصیتی در مورد متغیر آزاد x باشد آنگاه $\{x : \phi(x)\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر متناظر با هر خاصیتی نظیر $\phi(x)$ ، مجموعه ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که در $\phi(x)$ صدق می کنند. بدین ترتیب این اصل به ما اجازه می دهد بوسیله هر ویژگی دلخواه یک مجموعه را تشکیل دهیم. برتراند راسل بوسیله این پارادکس نشان داد که در نظر گرفتن این اصل در نظریه مجموعه های کانتور نظریه ای ناسازگار است و نیاز به بازنگری دارد.

وقتی تعدادی از اشیاء را با هم در نظر می گیریم و آنها را با عنوان یا صفتی که همه در آن مشترک اند مشخص کنیم مجموعه ای ساخته ایم. شاید چیزی بدیهی تر از این نباشد که بگوییم، هر توصیفی یا شرطی^۴ مجموعه ای را مشخص می کند. اینکه هر شرطی مجموعه ای می سازد حکمی وجودی است. یعنی با هر شرطی مجموعه ای بوجود می آید. نظر به اهمیت این حکم، آن را یکی از اصول نظریه ی مجموعه قرار داده و اصل انتزاع^۵ نامیده اند. بنابراین اصل، برای هر صفتی مجموعه ای وجود دارد که عضوهای آن تنها همان اشیائی هستند که آن صفت را دارند. اما مجموعه ها به اعتباری به دو گروه مجزا تقسیم می شوند. توضیح اینکه مجموعه ی انسانها خود، انسان نیست، بلکه شیئی مجرد است. همچنین مجموعه ی اسب ها خود، اسب

Russell's paradox³condition⁴axiom of abstraction⁵

نیست. پس این مجموعه ها خود عضو خود نیستند. در واقع اغلب مجموعه ها چنین اند. مجموعه ی اعداد فرد، خود عدد فرد نیست و بنابراین عضو خود نیست. اما مجموعه ی مفهوم ها خود یک مفهوم است و عضو این مجموعه است. حال همه ی مجموعه هایی مانند مجموعه ی انسان ها، مجموعه ی اسب ها و مانند آنها را که عضو خود نیستند گرد می آوریم و از آنها یک مجموعه می سازیم. اصل انتزاع هم می گوید چنین مجموعه ای وجود دارد. صفت کلی اعضای این مجموعه هم این است: «مجموعه هایی که عضو خود نیستند».

حال می پرسیم: آیا این مجموعه، عضو خود هست یا نیست. اگر این مجموعه عضو خود باشد - باید ناچار صفت مشترک عضوهای خود را داشته باشد یعنی - باید عضو خود نباشد. و اگر عضو خود نباشد - از آنجایی که صفت عضو خود نبودن، یعنی صفت مشترک عضوهای خود را دارد - باید عضو خود باشد. بنابراین، این مجموعه اگر عضو خود باشد عضو خود نیست و اگر عضو خود نباشد عضو خود هست. و این تناقض است. این مجموعه نه می تواند عضو خود باشد نه می تواند عضو خود نباشد. پس ملاحظه می شود شرط «عضو خود نبودن» شرط معقولی نیست. به بیان دیگر باید از اصل انتزاع که می گوید متناظر با هر شرطی مجموعه ای وجود دارد، صرف نظر نموده و مفهوم دقیق تری از شرط ارائه دهیم.

به بیان دیگر، خاصیت $\phi(x) \equiv x \notin x$ را در مورد مجموعه ها در نظر می گیریم. در این صورت مطابق اصل انتزاع $\{x : x \notin x\}$ یک مجموعه است که شامل همه مجموعه هایی است که عضو خودشان نیستند. قرار می دهیم $R = \{x : x \notin x\}$. پس $\forall A (A \in R \iff A \notin A)$. هیچ چیز در نظریه مجموعه های کانتور و فرگه مانع تعریف چنین مجموعه ای نمی شود. مشکل زمانی حادث می شود که به خود مجموعه R ، به عنوان مجموعه قابل قبول بنگریم و این سوال را در مورد R مطرح کنیم که آیا R عضوی از خودش است یا نه؟

• اگر پاسخ آری دهیم، پس $R \in R$ و لذا بنابر تعریف مجموعه R باید داشته باشیم $R \notin R$ که این تناقض است.

• اگر پاسخ خیر دهیم، پس $R \notin R$ و لذا بنابر تعریف R باید داشته باشیم $R \in R$ که این نیز تناقض است.

این پارادکس نشان می دهد که اصل گسترش وجود مجموعه ی $\{x : \phi(x)\}$ برای هر فرمول ϕ معتبر نیست. همچنین این پارادکس اولین عامل برای برانگیختن تلاش ریاضیدانان در جهت اصل موضوعی نمودن نظریه مجموعه ها بود. راسل به همراه آلفرد نورث وایتهد^۶ سعی نمودند با گسترش نظریه گونه ها^۷ این پارادکس را حل نمایند. در سال ۱۹۰۸ ارنست زرمelo یک دستگاه اصل موضوعی را برای نظریه مجموعه ها ارائه داد که از پارادکس های نظریه مجموعه ها جلوگیری می کرد. با اصلاح این اصول توسط فرانکل و زرمelo در سال ۱۹۲۰ نظریه مجموعه های زرمelo-فرانکل یا ZFC ایجاد گردید. در ZFC اصل انتزاع وجود ندارد بلکه بیان می کند برای هر مجموعه X و خاصیت ϕ زیر مجموعه Y از X وجود دارد که اعضای آن دارای خاصیت ϕ است. به عبارت دیگر

$$\forall x (x \in Y \iff x \in X \wedge \phi(x))$$

در این صورت مجموعه ناممکن راسل R دیگر یک مجموعه معتبر از نظر ZFC نبوده و اساساً قابل تعریف نخواهد بود. اما ZFC تنها نظریه اصل موضوعی بوجود آمده نبود بلکه نظریه های دیگری چون نظریه مجموعه های نیومن-گودل-برنیز (NGB) نیز در این راستا بوجود آمدند. این پارادکس برخلاف پارادکس آرایشگر ناچارمان می کند که اصل جاافتاده و پذیرفته

Alfred North Whitehead^۶

Type theory^۷

شده‌ای مانند اصل انتزاع را کنار بگذاریم. به این پارادکس‌ها به اصطلاح آنتی نومی^۸ به معنای ضد اصل می‌گویند. به پارادکس‌هایی مانند پارادکس آرایشگر که راه حل منطقی دارند شبه پارادکس^۹ می‌گویند. حال به بیان پارادکس دیگری از نوع آنتی نومی می‌پردازیم.

پارادکس دروغگو^{۱۰}

ساده‌ترین بیان این پارادکس این است که گوینده‌ای درباره‌ی خود بگوید: «آنچه می‌گویم دروغ است».

پرسش این است که آیا این گوینده راست می‌گوید یا دروغ می‌گوید. اگر راست بگوید پس اینکه می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند، یعنی دروغ می‌گوید و اگر دروغ می‌گوید پس اینکه خود می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند یعنی راست می‌گوید. پس اگر آنچه می‌گوید راست باشد دروغ است و اگر دروغ باشد راست است.

اهمیت پارادکس راسل در این بود که درک ما را در مورد یکی از بنیادی‌ترین مفهومات یعنی مفهوم مجموعه در معرض شک می‌نهد و اهمیت این پارادکس در این است که یکی دیگر از مهمترین مفاهیم یعنی مفهوم صدق را به مخاطره می‌افکند. پارادکس دروغگو نیز در نظریه‌ی صدق^{۱۱} همان اثر ویران‌کننده را دارد که پارادکس راسل در نظریه‌ی مجموعه‌ها. مفهوم صدق و اینکه جمله‌ها و گفته‌ها به چه اعتباری صادق‌اند از مباحث اساسی فلسفه و علوم‌اند و پارادکس دروغگو درست همین مفهوم را تا حد تناقض مورد تردید قرار می‌دهد.

برای پارادکس دروغگو راه حل‌های متعددی پیشنهاد کرده‌اند و می‌کنند و این نشانه‌ی آن است که برای این طبقه از پارادکس‌ها راه حل قاطعی هنوز نیافته‌ایم و شاید هرگز نیابیم. اما هر

^۸antinomy

^۹pseudo-paradox

^{۱۰}Liar paradox

^{۱۱}Semantics

راه حلی ما را از نکته‌ی تازه‌ای آگاه می‌کند. حال ما به بیان راه حل راسل با استفاده از اصل دور باطل و همچنین راه حل تارسکی با استفاده از مفهوم فرا زبان می‌پردازیم.

راسل پس از کشف پارادکس مشهور خود، پارادکس‌های گوناگون دیگری نیز کشف و معرفی کرد و برای حل آنها به خصوص پارادکس خود و پارادکس دروغگو به طرح چند نظریه ریاضی پرداخت. حال صرف‌نظر از صحت یا سقم این نظریه‌ها به این ایده می‌پردازیم. از نظر فلسفی، راسل بر آن بود که این دو پارادکس منشأ یکسانی دارند و علت وجودی آنها دخالت اصلی است که آن را اصل دور باطل^{۱۲} می‌نامید. بیان روشنی از این اصل این است که

هیچ مجموعه‌ای را نمی‌توان با شرطی مشخص کرد که خود آن مجموعه نیز مشمول آن گردد. یا یک مجموعه نباید تنها برحسب خود آن مجموعه قابل تعریف باشد. هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند شامل عضوهایی باشد که تنها برحسب آن مجموعه قابل تعریف باشند.

راسل و پوانکاره چنین شرط عضویتی را نامستند^{۱۳} نامیده‌اند. دور باطل وقتی دخالت می‌کند که در تعریف مجموعه، شرط عضویتی به کار بریم که مستقیم یا غیرمستقیم به مجموعه‌هایی ارجاع می‌دهد که یکی از آنها همان مجموعه‌ای باشد که می‌خواهیم مشخص کنیم. شرطی که نه تنها عضوهای یک مجموعه بلکه خود آن مجموعه را نیز دربرگیرد دور باطل است. پارادکس راسل بدلیل دخالت همین اصل بوجود می‌آید. زیرا شرط عضو خود نبودن را نه تنها به اعضای آن مجموعه بلکه به خود آن نیز تعمیم می‌دهد. پارادکس دروغگو نیز، به خصوص در شکل معروف تاریخی آن همین نقص را دارد. فردی از اهالی کِرت گفته است:

«همه‌ی کرتی‌ها دروغگو هستند».

Principle of Vicious Circle^{۱۲}

impredicative^{۱۳}

اگر این را یک سیسیلی درباره‌ی اهالی کرت گفته بود پارادکسی در کار نبود اما از آنجا که گوینده خود اهل کرت است، حکم او درباره‌ی کرتی‌ها شامل همین هم می‌شود. در اینجا نیز این گفته مشمول همان حکم مجموعه‌ی گفته‌های اهالی کرت می‌شود و این همان دخالت دور باطل در مشخص کردن مجموعه‌ی این گفته هاست.

فرانک رمزی در سال ۱۹۲۵ در مقاله‌ای با به چالش کشیدن این ایده‌ی راسل، پارادکس‌ها را به دو دسته می‌کند: پارادکس‌های منطقی که شامل پارادکس‌های متعدد نظریه‌ی مجموعه‌ها و مفاهیمی چون مجموعه و عضویت هستند و پارادکس‌های معنایی یا دلالت شناختی که شامل مفاهیمی چون صدق و کذب و تعریف‌پذیری هستند. با این تقسیم بندی پارادکس راسل و پارادکس دروغگو متعلق به دو دسته‌ی جدا از هم‌اند و برخلاف نظر راسل بایستی راه حل‌های جدا از هم داشته باشند.

تارسکی به پیروی از ارسطو می‌گوید جمله وقتی صادق است که امور همان گونه‌ای باشند که آن جمله می‌گوید و وقتی کاذب است که امور از آن گونه‌ای نباشند که می‌گوید. بنابراین «برف سپید است» وقتی صادق است که برف سپید باشد. تارسکی این حکم را که بسیار ساده به نظر میرسد چنین می‌نویسد:

«برف سپید است» صادق است اگر و تنها اگر برف سپید باشد.

در سمت راست این عبارت جمله‌ای را که اسناد صدق به آن داده‌ایم میان علامت (()) گذاشته‌ایم و در سمت چپ، از این علامت بیرون آورده‌ایم. به بیان دیگر در سمت راست جمله را نقل کرده‌ایم و به آن اسناد صدق داده‌ایم و در سمت چپ خود آن را اظهار کرده‌ایم و بکار برده‌ایم. تارسکی با این کار می‌خواهد بگوید وقتی به جمله‌ای اسناد صدق می‌دهیم حکمی درباره‌ی آن به عنوان یک واحد زبانی می‌کنیم و نتیجه‌ی این اسناد این است که خود آن جمله را بکار ببریم و تصدیق

کنیم.

وقتی می‌گوییم برف سپید است درباره‌ی دنیای خارج و امور بدان گونه‌ای که هستند سخن می‌گوییم. اما وقتی درباره جمله ای حکم به صدق آن می‌کنیم از زبان کاربردی فاصله می‌گیریم و دیگر نه درباره‌ی جهان بلکه درباره‌ی زبان سخن می‌گوییم. گاهی زبان را برای بحث درباره‌ی جهان یعنی امور بیرون از زبان بکار می‌بریم و گاهی برای بحث درباره‌ی زبان. در کاربرد اول موضوع مورد بحث زبان، جهان خارج است یعنی با آن درباره‌ی موضوع های بیرون از زبان سخن می‌گوییم و برای مثال بیان می‌کنیم: برف سپید است و کلاغ سیاه است. این لایه از زبان را که نخستین لایه‌ی کاربرد زبان است زبان موضوعی¹⁴ می‌گوییم و در کاربرد دوم که درباره‌ی زبان حرف می‌زنیم و می‌گوییم:

«برف سپید است» صادق است.

از لایه‌ی نخستین فراتر می‌رویم و درباره‌ی جمله‌های زبان صحبت می‌کنیم. بدین اعتبار این لایه از زبان را فرازبان¹⁵ می‌نامیم. اکنون اگر فرا زبان را موضوع بحث قرار دهیم و درباره‌ی جمله‌های این زبان حکمی صادر کنیم و برای مثال بگوییم:

««برف سپید است» صادق است» صادق است.

از فرا زبان به فرا فرا زبان رفته‌ایم و زبان موضوعی ما نخستین فرازبان شده است. البته می‌توان این رویه را ادامه داد ولی برای دو مرحله‌ی نخست کفایت می‌کند.

سخن تارسکی این است که عبارت «صادق است» یا «کاذب است» متعلق به فرازبان است. نخست بایست زبان موضوعی خود را که با آن درباره‌ی جهان و برف و کلاغ حرف

¹⁴ object language

¹⁵ meta language

می‌زنیم داشته باشیم سپس از این زبان فراتر رویم و در فرا زبان حکم به صدق و کذب جمله‌های آن کنیم. حال پارادکس دروغگو را در نظر می‌گیریم، در پارادکس دروغگو عبارت «دروغ است» را بدون فرا رفتن از زبان موضوعی برای همین زبان به کار برده‌ایم و این کاربردی اشتباه است. با این کار دو لایه‌ی زبان موضوعی و فرا زبان را به هم آمیخته‌ایم و به ناچار دچار تناقض شده‌ایم. بطور خلاصه جمله‌ی

«آنچه می‌گویم دروغ است»

جمله‌ای است که عبارت «دروغ است» در جای درست خود بکار نرفته و جمله از نظر ساختار منطقی نادرست است. نتیجه‌ای که تارسکی از این بحث می‌گیرد این است که زبان طبیعی بدین اعتبار – اعتبار دلالت شناسی – نارساست¹⁶ و از این رو دلالت شناسی خود را محدود به زبان منطقی و ریاضی می‌کند. دلالت شناسی تارسکی که مبتنی بر سلسله مراتب فرازبان هاست به پایه گذاری نظریه‌ی مدل انجامیده است.

پارادکس بری¹⁷

این پارادکس که در سال ۱۹۰۶ توسط برتراند راسل بیان شد، منتسب به بری¹⁸ می‌باشد. «کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف نیست» توصیفی متشکل از ۱۲ کلمه می‌باشد. بنابراین کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف شد، زیرا عبارت بیان شده دارای ۱۲ کلمه است. چون تعداد کلمات متناهی فرض شده‌اند پس تعداد عبارتهای متشکل از ۱۳ کلمه متناهی هستند و از اینرو تعداد اعداد صحیحی که با استفاده از این عبارتها توصیف می‌شود، بنابر اصل لانه

¹⁶defective

¹⁷Berry's paradox

¹⁸G.H. Berry

کبوتری¹⁹ متناهی است. چون تعداد اعداد صحیح نامتناهی است پس اعداد صحیحی وجود خواهد داشت که با استفاده از عبارتهای ۱۳ کلمه‌ای قابل توصیف نخواهد بود، یعنی اعداد صحیحی وجود خواهند داشت که «قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه نیستند». با استفاده از اصل خوش ترتیبی²⁰، اگر اعداد صحیحی وجود دارند که خاصیت فوق را ارضا می‌کنند، پس کوچکترین عدد صحیحی که خاصیت مذکور را ارضا می‌کند وجود دارد. بنابراین کوچکترین عدد صحیحی وجود دارد که خاصیت «قابل توصیف نبودن در کمتر از ۱۳ کلمه» را ارضا می‌کنند. یعنی این عدد صحیح با عبارت مذکور تعریف می‌شود. عبارت مذکور شامل ۱۲ کلمه است، پس عدد صحیحی که با استفاده از عبارت فوق توصیف می‌شود کمتر از ۱۳ کلمه دارد و کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه غیر قابل توصیف باشد، نیست و با عبارت فوق توصیف نمی‌شود. این یک پارادکس است: عدد صحیحی که با عبارت فوق توصیف می‌شود بایستی وجود داشته باشد، اما چون عبارت مذکور خود متناقض²¹ است (یعنی هر عدد صحیحی که آن توصیف می‌کند، قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه است)، هیچ عدد صحیحی با آن توصیف نمی‌شود.

می‌توان صورت دیگری از این پارادکس را بیان کرد: «فرض کنید که x نخستین عددی است که نمی‌تواند بوسیله‌ی هیچ جمله‌ای با کمتر از ۲۰۰ کاراکتر توصیف شود.» با استفاده از جمله‌ی اخیر، چنین عددی را توصیف کردیم.

به عبارتی پارادکس بری شامل توصیف چیزی است که توصیف مذکور شامل تناقض آشکاری با معنای توصیف می‌باشد. این پارادکس در زمره‌ی پارادکس‌های معنایی بوده و مشابه پارادکس گرلینگ و پارادکس ریچارد می‌باشد که در فصل ۳ در خصوص آنها بحث خواهد شد.

Pigeonhole Principle¹⁹

well ordering principle²⁰

self-contradictory²¹

می‌توان با مشخص نمودن سطوح توصیف از تناقض اجتناب کنیم نظیر پارادکس دروغگو از خانواده پارادکس های معنایی و پارادکس راسل از خانواده پارادکس های منطقی. سطح صفر را چنین در نظر می‌گیریم: «کوچکترین عدد صحیحی که در چنین روشی توصیف می‌شود» فقط در سطوح بالاتر چنین توصیفی پذیرفته می‌شود و توصیفاتشان فقط به سطح زیر یک ارجاع می‌یابد. بنابراین توصیف «کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف است» در سطح صفر پذیرفته نمی‌شود. در سطح یک، این عبارت بدین معنا تفسیر می‌شود که «کوچکترین عدد صحیحی که در سطح صفر در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف نیست» زیرا در سطح صفر توصیف خودش نیست و به صورت خود-ردکردنی²² نیست.

این پارادکس ممکن است بدون متوسل شدن به توصیف سطوح دیگر قابل حل باشد. اعداد طبیعی می‌توانند توسط ° و تابع تالی تعریف شوند.

° یک عدد است

۱ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

۲ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

۳ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

و همین طور می‌توان به صورت نامحدود تعریف کرد.

تالی تعریف شده در آخرین سطر صرفاً یک توصیف ° کلمه‌ای است. برای مثال، ۲۴ با این روش توسط سطری که بدنبال تعریف ۲۳ می‌آید، تعریف می‌شود. در حالت کلی، هر عدد طبیعی با این روش توسط عبارتی که کمتر از ۱۳ کلمه دارد توصیف می‌شود. پس به منظور درک توصیف بری، کوچکترین کلمه‌ای که بتوان در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف کرد، وجود نخواهد داشت. بنابراین عددی که هم قابل توصیف و هم غیر قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه باشد،

self-refuting²²

وجود ندارد. سطح «قابل توصیف بودن» در عبارت بری، وابسته به متن خواهد بود. برای مثال وقتی سطح ۲ یا سطح ۲۳ را بیان می‌کنیم، فقط در متن شرح و توصیفشان قابل درک خواهد بود. آیا «کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از صد حرف فارسی نمایش داد» وجود دارد؟ چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی و تعداد حروف فارسی متناهی است پس عددی وجود خواهد داشت که نمی‌توان آن را با عبارتی شامل کمتر از صد حرف فارسی تعریف کرد. بنا به اصل خوش ترتیبی در اعداد طبیعی، کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از صد حرف فارسی نمایش داد وجود دارد. اما عبارت فوق که بین دو نماد «و» قرار دارد کمتر از صد حرف دارد، یعنی عدد ارائه شده با کمتر از صد حرف فارسی تعریف شد!

پارادکس بری به صورتهایی که بیان گردید بخاطر ابهام سیستمی در کلماتی مانند «توصیف پذیر»، «تعریف پذیر»، «ارضاپذیر»، «قابل نامگذاری» و ... ایجاد گردیده است. کلماتی از این نوع منجر به دورباطلی سفسطه آمیز می‌شوند. به منظور حل چنین پارادکس هایی بایستی دقیقاً تعیین نمود مواردی که استفاده از زبان موجب اشتباه می‌شود و محدودیت هایی را جهت اجتناب از این موارد فراهم آوریم. پارادکس هایی از این خانواده را می‌توان با ترکیب لایه های معانی در زبان حل نمود. کلماتی با این ابهام سیستمی ممکن است اندیس گذاری شوند که دلالت بر این امر دارد که معنای یک سطح مقدم بر دیگری فرض شده است. «عددی که در کمتر از یازده کلمه قابل تعریف نباشد» ممکن است در این طرح در کمتریازده کلمه قابل تعریف باشد.

ضمناً با استفاده از برنامه ها و برهان های با طول کراندار، ممکن است عبارت شبیه پارادکس بری را در زبان صوری ریاضی بسازیم، که گریگوری چایتین²³ موفق به این امر گردید. (ر.ک. [۷])

گودل از پارادکس دروغگو الهام گرفت. در واقع جوهر قضیه ی تاریخی او همان پارادکس

Gregory Chaitin²³

دروغگو است که از زمان یونان باستان شناخته شده بود. اگر در پارادکس دروغگو (من درست نیستم) عبارت «درست» را با «اثبات پذیر» تعویض نماییم، در این حالت یک پارادکس نخواهیم داشت. زیرا جمله‌ی «(من اثبات پذیر نیستم)» یک تناقض نیست. چرا؟ چون اگر نادرست باشد باید «اثبات پذیر» باشد که امکان ندارد. پس این جمله درست بوده و از شق اخیر هیچ تناقضی حاصل نمی‌شود. این جمله درست است اما نمی‌توان آن را اثبات نمود. اما برای اینکه بتوان این را بعنوان یک قضیه‌ی ریاضی در نظر گرفت باید به یک زبان صوری ترجمه شود. در زبانهای محاوره‌ای چیزی بنام ضمیر داریم و در نتیجه جملات می‌توانند درباره خودشان صحبت کنند. آیا در ریاضیات نیز می‌توان جمله‌ای نوشت که راجع به خودش صحبت کند؟

کارنبوغ آمیز گودل همین بود. او این جمله را به شکل صوری درآورد و بطور دقیق نشان داد که اگر یک زبان صوری داشته باشیم به طوری که با استفاده از آن زبان بتوان درباره‌ی اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب صحبت کرد آنگاه می‌توان جمله‌ی «(من اثبات ناپذیرم)» را به این زبان ترجمه کرد. با توجه به اینکه هر دستگاه صوری که بخواهد کل ریاضیات را پوشش دهد خود بخود شامل اعداد طبیعی و اعمال مربوط به آن خواهد بود، پس ترجمه صوری جمله‌ی «(من اثبات ناپذیرم)» یکی از گزاره‌های آن دستگاه خواهد بود. بنابراین در آن دستگاه صوری گزاره‌ای خواهیم داشت که درست است اما اثبات پذیر نیست. این دقیقاً یک جواب منفی برای برنامه صورتگرایی هیلبرت بود. در ضمن قضایای ناتمامیت دیگری نیز با الهام از پارادکس بری بوجود آمده‌اند که در آنها پیچیدگی برنامه‌های کامپیوتری برای ایجاد اعداد طبیعی مورد توجه هستند. با روش اخیر می‌توان به ناتمامیت ریاضیات بصورت خیلی راحتتر دست یافت.

پارادکس کواین²⁴

این پارادکس مرتبط با ارزش های درستی است که منتسب به کواین²⁵ است. پارادکس کواین با پارادکس دروغگو مرتبط است. این پارادکس نشان می دهد یک عبارت می تواند پارادکسی باشد حتی اگر خودارجاعی نبوده و از ضمیر اشاره استفاده نکند (یعنی صراحتاً به خودش ارجاع نیابد). پارادکس می تواند به صورت زیر بیان شود:

«منجر به تناقض می شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود» منجر به تناقض می شود

هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود.

اگر پارادکس واضح نباشد، می توان آن را در دو قسمت بیان نمود:

آن = منجر به تناقض می شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود

نقل قول خودش = «منجر به تناقض می شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود»

آن بر نقل قول خودش ملحق می شود = «منجر به تناقض می شود هر گاه به نقل قول خودش

ملحق شود» منجر به تناقض می شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود.

بدین ترتیب، مجدداً توصیف این پارادکس را در نظر گرفته و ادعا می کنیم که عبارت فوق

غلط است. به عبارت دیگر، جمله نتیجه می دهد که آن غلط است، که آن هم پارادکس است

چون اگر آن غلط باشد، آنچه آن بیان می کند در حقیقت درست خواهد بود. به این امر توجه

می کنیم که آنچه نقل قول شده رشته ای از کلمات است، در حالی که آنچه منجر به تناقض

می شود یک گزاره است.

پارادکس دروغگو («این جمله غلط است»)، یا «جمله ی بعدی درست است و جمله قبلی

غلط است» در واقع اشکالات اساسی در تخصیص ارزش درستی حتی به جملات ساده را شرح

می دهد. همانطور که قبلاً بیان گردید بسیاری از فیلسوفان جهت شرح پارادکس دروغگو تلاش

نمودند و نهایتاً مشکل را دروازه ی «این» یافتند که نوعی خودارجاعی است. ساختار کواین شرح

می‌دهد که پارادکس‌هایی از این نوع مستقلاً از چنین خودارجاعی مستقیم نشأت می‌گیرند. در واقع، هیچ روش کلی برای حذف این پارادکس‌های بظاهر فلج‌کننده زبان نداریم. هر سیستمی همانند زبان فارسی که شامل موجودیت‌هایی نظیر کلمات و جملات است که می‌تواند با بکارگیری کلمات خودش منجر به چنین پارادکسی گردد.

پارادکس یابلو²⁶

نمونه‌ای از پارادکس دروغگو، سخن سفسطه آمیزی به این شکل است که اولاً دوری بوده و در ثانی به صورت غیر مستقیم خودارجاعی است:

حمید: «آنچه سعید می‌گوید غلط است.»

سعید: «آنچه حمید می‌گوید درست است.»

این پارادکس توسط آلبرت ساکسونی در قرون وسطی طرح گردیده است و اصطلاحاً پارادکس دور نامیده می‌شود. البته می‌توان آن را به حلقه‌ی طولانی تری تعمیم داد:

(S_1) جمله‌ی S_2 غلط است.

(S_2) جمله‌ی S_3 غلط است.

(S_3) جمله‌ی S_4 غلط است.

⋮

(S_n) جمله‌ی S_1 درست است.

این جملات به صورت متناوب درست و غلط خواهند بود: $TFTF \dots$ یا $FTFT \dots$ زیرا

S_1 درست است اگر S_n درست باشد، و غلط است اگر S_n غلط باشد. اگر تعداد n ‌ها زوج باشد

پارادکس ایجاد می‌شود زیرا در این حالت S_1 تا S_n ارزش درستی متفاوتی خواهند گرفت.

پارادکس استفان یابلو²⁷ در سال ۱۹۹۳ منتشر گردید که شامل دنباله‌ای نامتناهی از جملات است:

- (Y_1) همه‌ی جملات بعدی ($Y_2, Y_3, \dots$) غلط هستند.
 (Y_2) همه‌ی جملات بعدی ($Y_3, Y_4, \dots$) غلط هستند.
 (Y_3) همه‌ی جملات بعدی ($Y_4, Y_5, \dots$) غلط هستند.
 ⋮
 (Y_n) همه‌ی جملات بعدی ($Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots$) غلط هستند.
 ⋮

فرض کنید Y_1 درست باشد. پس همه‌ی جملات بعدی یعنی ($Y_2, Y_3, \dots$) غلط اند. اگر Y_2 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 2$ درست است و این تناقض است. همچنین اگر Y_1 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 1$ درست است. ولی جملات بعد از Y_n یعنی $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots$ همگی غلط اند. اگر Y_{n+1} غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_m که $m > n + 1$ درست است و این تناقض است.

یابلو ادعا نمود که برخلاف انواع پارادکس دروغگو، این پارادکس شامل خودارجاعی نیست، زیرا هر جمله راجع به جملات بعدی است نه در خصوص خودش. اما هر جمله به نظر می‌رسد به صورت ضمنی خودارجاعی باشد زیرا عبارت «همه‌ی جملات بعدی» در هر مورد به این صورت «همه‌ی جملات بعد از این» فهمیده می‌شود. یابلو واقعاً به جملات بعدی را توسط $(\forall k > n)$ ارجاع می‌دهد، که n اندیس فعلی برای Y است، اما خودارجاعی هنوز به صورت ضمنی محتمل است. اما خواه خودارجاع باشد یا نه، ما بوضوح یک پارادکس داریم.

Stephen Yablo²⁷

پارادکس کوری²⁸

پارادکس کوری، پارادکسی است که در نظریه‌ی ساده مجموعه‌ها یا منطق مقدماتی رخ می‌دهد و در واقع مشتقی است از یک عبارت دلخواه که از یک عبارت خودارجاعی و ظاهراً از قواعد استنتاج منطقی تعریف می‌شود. این پارادکس منتسب به یکی از منطق دانان بنام هاسکل کوری²⁹ است. با استفاده از عبارت خودارجاعی S ، «اگر S درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است». بنظر میرسد که می‌توان نتیجه‌گیری کرد که پاریس پایتخت ایتالیا است.

فرض کنید S درست باشد و قرار دهید:

(۱) S درست است.

از ۱ نتیجه می‌شود:

(۲) S

از ۲ با تعریف S بدست می‌آوریم:

(۳) اگر S درست باشد آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است.

از ۱ و ۳ بنابر قاعده‌ی وضع مقدم³⁰ نتیجه می‌گیریم که

(۴) پاریس پایتخت ایتالیا است.

چون عبارت (۴) را با فرض (۱) بدست آوردیم پس (۴) $\rightarrow$ (۱) درست است. بنابراین

(۵) اگر S درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است.

از ۵ با استفاده از تعریف S نتیجه می‌شود:

(۶) S

از ۶ بدست می‌آید:

Curry's Paradox²⁸

Haskell Curry²⁹

modus ponens³⁰

(۷) S درست است.

از ۵ و ۷ با استفاده از قاعده‌ی وضع مقدم داریم:

(۸) پاریس پایتخت ایتالیا است.

حال اگر S_2 را قرار دهیم: «اگر S_2 درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا نیست» به صورت مشابه، اثبات می‌شود که پاریس پایتخت ایتالیا نیست و اگر نتایج حاصل از این دو بحث را با هم مقایسه نماییم، یک تناقض بر پایه‌ی مفروضات داریم.

در حقیقت، هر عبارتی که درست یا غلط باشد، ممکن است در بحث فوق بجای «پاریس پایتخت ایتالیا است» جایگزین شود. حتی می‌توان یک تناقض را در آن جایگزین نماییم. ضمناً پارادکس اجتناب پذیر است اگر بجای درستی، اثبات پذیر جایگزین شود. چون از ۶ به ۷ رد می‌شود. (ر.ک. [۵])

به عنوان مثالی دیگر این جمله را در نظر بگیرید: «اگر این جمله درست باشد، فردا دنیا به اتمام خواهد رسید.» پس با توجه به ماهیت ادعای شرطی و بدون اعتقاد به اینکه «فردا دنیا به اتمام خواهد رسید»، بنظر میرسد که بایستی عبارت فوق را پذیرفته و نتیجه بگیریم که فردا دنیا به اتمام خواهد رسید. پارادکس کوری از فرض عبارت شرطی حاصل می‌شود که به درستی خودش ارجاع می‌یابد.

همین مفهوم را می‌توان در نظریه مجموعه‌ها داشت. می‌توان هر عبارت منطقی Y را از

وجود مجموعه‌ی $X = \{x | (x \in x) \rightarrow Y\}$ اثبات نمود:

(۱) از تعریف X داریم: $(X \in X) \Leftrightarrow ((X \in X) \rightarrow Y)$

(۲) از ۱ داریم: $(X \in X) \rightarrow ((X \in X) \rightarrow Y)$

(۳) از ۲ و ادغام داریم: $(X \in X) \rightarrow Y$

(۴) از ۱ داریم: $((X \in X) \rightarrow Y) \rightarrow (X \in X)$

(۵) از ۳ و ۴ با قاعده‌ی وضع مقدم داریم: $X \in X$

(۶) از ۳ و ۵ با قاعده‌ی وضع مقدم داریم: $.Y$

در واقع بدین ترتیب، نوع خاصی از پارادکس راسل محقق می‌شود، ولی از آن پارادکس از یک دیدگاه مهم کلی‌تر است. برخی پیشنهادها برای رهاسازی نظریه مجموعه‌ها از تناقض سعی بر غلبه بر پارادکس راسل داشته‌اند نه با محدود کردن اصل انتزاع بلکه با محدود ساختن قواعد منطق بطوریکه طبیعت متناقض مجموعه‌ی همه مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند را متحمل شود. این استدلال نشان می‌دهد که هدف مذکور آنچنان ساده نیست چون که ما فقط یک تناقض نداریم بلکه در حقیقت یک جمله‌ی دلخواه داده شده را بدون استفاده از تمام امکانات منطق گزاره‌ها نشان دادیم.

همین پارادکس را به زبان صوری نیز می‌توان بیان نمود. Y را گزاره‌ای مدنظر گیرید که می‌خواهیم اثبات کنیم. همچنین X را عبارتی قرار دهید که شرح می‌دهد Y از درستی X نتیجه می‌شود. به صورت ریاضی یعنی $X = (X \rightarrow Y)$. ملاحظه می‌کنیم که X با استفاده از خودش تعریف شده است. برهان به این شکل است:

(۱) از قاعده تکرار فرض داریم: $X \rightarrow X$

(۲) با استفاده از فرض و جانشینی X داریم: $X \rightarrow (X \rightarrow Y)$

(۳) با استفاده از قاعده ادغام از ۲ داریم: $X \rightarrow Y$

(۴) با جانشینی ۳ و با توجه به فرض $X = X \rightarrow Y$ داریم: X

(۵) با استفاده از قاعده‌ی وضع مقدم از ۳ و ۴ داریم: $.Y$

پارادکس ریچارد³¹

پارادکس ریچارد یک پارادکس معنایی آنتی‌نومی در زبان طبیعی است که توسط ریاضیدان

³¹ Richard's paradox

فرانسوی جولیس ریچارد³² در سال ۱۹۰۵ ارائه گردید. بیان اصلی این پارادکس ارتباط مباحث قطری کانتور با شمارش پذیری مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

این پارادکس از این نکته نشأت می‌گیرد که برخی از عبارات معین در زبان طبیعی صراحتاً اعداد حقیقی را تعریف می‌کنند در حالیکه سایر عبارات زبان طبیعی چنین تعریفی را ارائه نمی‌کنند. به عنوان مثال، «عدد حقیقی که قسمت صحیح‌اش ۱۷ بوده و n امین رقم اعشاری‌اش ۰ باشد اگر n فرد باشد و در غیر این صورت ۱ باشد» عدد حقیقی $۱۷/۱۰۱۰۱۰۱۰۱...$ را توصیف می‌کند، در حالی که عبارت «تهران پایتخت ایران است» توصیفی از یک عدد حقیقی نیست.

بنابراین در زبان طبیعی لیست نامتناهی از عبارات موجود است که صراحتاً اعداد حقیقی را تعریف می‌کنند. لیست مذکور را می‌توان با استفاده از ترتیب الفبایی معمول مرتب نمود. این لیست، لیست نامتناهی از اعداد حقیقی متناظر را نتیجه می‌دهد نظیر $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$.

حال عدد حقیقی r را به این صورت تعریف می‌کنیم: «قسمت صحیح آن صفر بوده و n امین رقم اعشاری r یک می‌باشد، اگر n امین رقم اعشاری r_n یک نباشد و در غیر این صورت n امین رقم اعشاری r دو می‌باشد».

پاراگراف قبلی عبارتی در زبان طبیعی را بیان می‌کند که صراحتاً عدد حقیقی r را تعریف می‌کند. بنابراین r بایستی یکی از اعداد r_n باشد. با وجود اینکه r ساخته شد ولی با هیچ r_n ای برابر نیست و این تناقض است.

فصل ۲

مباحث مقدماتی

در سال ۱۹۶۹ ویلیام لاوور^۱ مقاله‌ای تحت عنوان استدلالهای قطری و رسته های دکارتی بسته [۱۵]، در مورد چگونگی نمایش بسیاری از پارادکس های کلاسیک و قضایای ناتمامیت در یک مدل رسته ای نگاشت. وی از زبان نظریه رسته ها (رسته های بسته دکارتی خاص) جهت توصیف این نظام بهره جست. لاوور در مقاله‌ی مذکور نشان داد که در رسته‌های بسته‌ی دکارتی که برخی شرایط معین را ارضا می کنند، پدیده های پارادکسی می‌توانند رخ دهند. وی در ادامه با نمایش مثالهای ذیل به شرح این طرح پرداخت :

(۱) قضیه‌ی کانتور که $\mathbb{N} \not\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(۲) پارادکس راسل،

(۳) تعریف ناپذیری ارضاپذیری،

(۴) قضیه‌ی تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی،

(۵) قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل.

در راستای این امر چندین مقاله از جمله [۱۱]، [۲۱]، [۲۳]، [۲۴] نگاشته شدند ولی متأسفانه مقاله لاوور در بین متخصصین نظریه رسته ها و نیز غیر متخصصین مورد بی مهری قرار گرفت. لاوور و شانول^۲ این نظرات را در بخش ۲۹ کتابشان [۱۷] مورد تجدید نظر قرار دادند. اخیراً لاوور و رابرت رزبروگ^۳ کتابی تحت عنوان مجموعه ها برای ریاضیات [۱۶] منتشر نمودند که در صفحاتی از این کتاب به طرح مذکور پرداخته شده است.

در ادامه مباحث ویلیام لاوور، نشان می‌دهیم که بسیاری از پارادکس های خودارجاعی، قضایای ناتمامیت و قضایای نقطه ثابت از طرح ساده یکسانی نتیجه می شوند. ما این تشابهات

¹William Lawvere

²Schanuel

³Rosebrugh

را با مطرح نمودن چگونگی ارتباط این ساختارهای ساده با پارادکس های معنایی به نمایش می گذاریم و همچنین شرح خواهیم داد که چگونه این تشابهات منجر به استدلالهای قطری و قضایای نقطه ثابت در منطق، نظریه ی محاسبه، نظریه ی پیچیدگی و نظریه ی زبان های صوری می شوند.

هدفمان در این پایان نامه همچون [۲۷] قابل دسترس کردن این نتایج شگفت انگیز برای مخاطبان بیشتر است. در راستای این هدف مجدداً قضایای لاوور را در اینجا بدین منظور بیان می کنیم. ولی بجای رسته ها، از مجموعه ها و توابع استفاده می کنیم. در این پایان نامه، قضایای مهم و برهانهایشان یک روند خودآموزی دارند. یکی از قضایا تعمیم داده شده و موارد متفاوتی از نتایجش بیان می شوند. برای نشان دادن فراگیر بودن قضایا، مثالهایی از حوزه های مختلف منطق و علوم نظری کامپیوتر ارائه می دهیم.

به صورت کلاسیک، کانتور اثبات نمود که هیچ تابع پوشایی $\mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ موجود نیست، که در آن $2^{\mathbb{N}}$ مجموعه ی توابع از $\mathbb{N}$ به $2 = \{0, 1\}$ است. کلاس $2^{\mathbb{N}}$ مجموعه ای از توابع مشخصه روی مجموعه ی $\mathbb{N}$ است که با مجموعه توانی $\mathbb{N}$ هم عدد است. قضیه کانتور را برای نشان دادن این امر که برای هر مجموعه ی T ، تابع پوشایی $T \rightarrow 2^T \sim \mathcal{P}(T)$ موجود نیست، می توان تعمیم داد. همچنین همان قضیه برای مجموعه های دیگری علاوه بر 2 ، نظیر $3 = \{0, 1, 2\}$ یا $23 = \{0, 1, 2, \dots, 21, 22\}$ نیز صادق است. قضیه برای $1 = \{0\}$ درست نیست.

در حالت کلی، می توانیم 2 را با یک مجموعه Y دلخواه غیرتباهیده جایگزین کنیم. در نتیجه این تعمیم، گزاره اساسی قضیه کانتور بطور کلی بیان می کند که اگر Y غیرتباهیده باشد آنگاه تابع پوشایی از T به Y^T موجود نیست، به طوری که Y^T مجموعه توابع از T به Y است. مجموعه ی Y می تواند به عنوان مجموعه ممکن ارزش درستی یا خواص اعضای T تلقی گردد. ناتباهیده بودن بدین معنی است که اشیای Y می توانند با هم مبادله گردند یا تابع α از Y به Y

بدون هیچ نقطه ثابتی موجود باشد (نقطه ثابت یعنی y عضوی از Y به طوری که $(\alpha(y) = y)$).

ما قبل از اینکه به توابع $\hat{f} : T \rightarrow Y^T$ توجه کنیم، به معادل آن یعنی توابع $f : T \times T \rightarrow Y$ می‌پردازیم. هر تابع $\hat{f}$ می‌تواند به تابع f تبدیل شود به طوری که $f(t, t') = \hat{f}(t')(t) \in Y$. بیان پوشا نبودن $\hat{f}$ مشابه موجود بودن $g(-) \in Y^T$ است، به طوری که برای هر $t' \in T$ تابع $\hat{f}$ پوشا نبودن $\hat{f}(t') = f(-, t') : T \rightarrow Y$ با تابع $g(-) : T \rightarrow Y$ یکسان نیست. به عبارت دیگر یک عضو t در T موجود است به طوری که $g(t) \neq f(t, t')$. تابع $g : T \rightarrow Y$ را قابل نمایش با t_0 خواهیم خواند اگر $g(-) = f(-, t_0)$. بنابراین اگر $\hat{f}$ پوشا نباشد آنگاه یک $g(-) \in Y^T$ موجود است که با هیچ عضو $t \in T$ قابل نمایش نیست.

به صورت فیلسوفانه، این قضیه کانتور تعمیم یافته، بیان می‌کند که ارزشهای درستی یا خواص اعضای T جزئی نیستند و روشی موجود نیست که یک مجموعه T از اشیاء در رابطه با راستگویی یا خواصشان بتواند توصیف یا صحبت کند. به عبارت دیگر محدودیت باید به گونه‌ای باشد که T خواص خود را از دست ندهد. پارادکس دروغگو نخستین مثال سه هزار ساله است که نشان می‌دهد زبانهای طبیعی درباره درستی جملات خودشان صحبت نمی‌کنند. پارادکس راسل نشان می‌دهد که نظریه طبیعی مجموعه‌ها، به صورت ذاتی ناقص است زیرا مجموعه‌ها می‌توانند در ارتباط با خواصشان از جمله عضویت صحبت کنند. نتایج ناتمامیت گودل نشان می‌دهد که علم حساب نمی‌تواند به صورت کامل در رابطه با اثبات پذیری خودش صحبت کند. مسأله توقف تورینگ نشان می‌دهد که کامپیوترها نمی‌توانند به صورت کامل در ارتباط با خاصیت کامپیوتری که توقف خواهد نمود و یا در حلقه بی‌نهایت (دور بی پایان) خواهد افتاد، بحث کنند. تمام این نمونه‌های متفاوت حقیقتاً یک مطلب را بیان می‌کنند: اشیاء وقتی با خواصشان سروکار دارند، موجبات زحمت و دردسر را فراهم می‌آورند. توجه کنید که نظرمات تلاش به منظور ایجاد یک صورتگرایی (صوری سازی) ساده است بطوریکه تمامی این نظرات گوناگون را توصیف نماید.

بهترین بخش این طرح واحد، این است که نشان می‌دهد آنها حقیقتاً پارادکس نیستند، بلکه محدودیت‌های موجودند. پارادکس‌ها نشان می‌دهند که تخطی از این محدودیت‌ها، به سیستم ناسازگار و بی‌ثباتی منجر خواهد شد. پارادکس دروغگو نشان می‌دهد اگر به زبان طبیعی اجازه دهید در ارتباط با درستی جملات خودش صحبت کند آنگاه به تناقضاتی در زبانهای طبیعی منجر خواهد شد. پارادکس راسل بیان می‌کند که اگر اجازه دهیم بدون اعمال محدودیت‌ها در رابطه با هر مجموعه‌ای صحبت شود، تناقضی در نظریه مجموعه‌ها ایجاد خواهد شد. این مطلب دقیقاً توسط قضیه تارسکی در رابطه با درستی در سیستمهای صوری بیان شده است. طرح ما، محدودیت‌های ذاتی تمام این سیستمها را ارائه می‌کند. ساختار g به صورت شهودی، محدودیتی است که سیستمان (f) نمی‌توانند با آن سروکار داشته باشند. اگر سیستم با g سروکار داشته باشد، آنگاه تناقضی ایجاد خواهد شد (نقطه ثابت).

عکس نقیض قضیه کانتور بیان می‌کند اگر یک نگاشت پوشا از $T \rightarrow Y^T$ موجود باشد، آنگاه Y بایستی تباهیده باشد. یعنی هر نگاشتی از Y به Y بایستی دارای نقطه ثابتی باشد. به عبارتی دیگر، اگر T بتواند خواص خودش را توصیف کند آنگاه Y بایستی به صورت شهودی ناقص باشد. این تباهیدگی روشی برای ایجاد قضایای نقطه ثابت است.

فصل سوم پایاننامه، قضیه اصلی لاوور و تعدادی از تعمیم‌هایش را بیان می‌کند. فصل چهارم پایاننامه، مثالهای متنوعی را در بر می‌گیرد. این فصل با بیان پارادکس‌های کلاسیک شروع شده و با ارائه تعدادی پارادکس معنایی ادامه می‌یابد. پس از آن به مثالهایی در زمینه‌ی نظریه‌ی علوم کامپیوتر پرداخته خواهد شد. از جمله مباحث این فصل می‌توان به بررسی قضیه‌ی کانتور، پارادکس راسل، پارادکس گرلینگ⁴، پارادکس دروغگو، پارادکس ریچارد، مسأله توقف تورینگ، اُرَاکل B که $P^B \neq NP^B$ و پارادکس سفر در زمان اشاره نمود.

Grelling's paradox⁴

بخش پنجم پایاننامه، عکس نقیض قضیه اصلی و تعمیم هایش را بیان می‌کند. در ادامه‌ی این فصل، مثالها و کاربردهایی از عکس نقیض قضیه اصلی ارائه خواهد شد. از جمله‌ی این مباحث می‌توان به نخستین قضیه ناتمامیت گودل، قضیه ناتمامیت گودل - راسر، قضیه تارسکی، گزاره‌های پَریخ^۵، پارادکس لُب^۶، قضیه رایس^۷ و ماشینهای خودمولد وان نیومن اشاره نمود. در فصل ششم، پایان نامه را با نیم نگاهی به زمینه ادامه کار در آینده بخصوص در حوزه‌های مختلف علوم ریاضی و کامپیوتر به اتمام خواهیم رساند. همچنین نمونه‌هایی از محدودیت‌ها و قضایای نقطه ثابت که ممکن است در این طرح بیان شود را لیست نموده‌ایم.

ما این فصل را با بیان اثبات اصلی کانتور از قضیه‌ی قطری به پایان می‌رسانیم. این برهان از کتاب شائوگان لاوین^۸ [۱۴] برگرفته شده است.

این اثبات نه تنها به دلیل سادگی آن قابل تأمل به نظر می‌رسد بلکه به دلیل اصولی که در آن بکار گرفته شده است، می‌تواند به عنوان قضیه کلی بسط داده شود. مثلاً در آن توانهای مجموعه‌های خوش تعریف هیچ ماکزیممی ندارند و یا اینکه آن مجموعه برای هر مجموعه L داده شده M دیگری را می‌تواند در کنار آن جایگزین کند که بزرگتر از توان L است.

مثلاً فرض کنید L یک پیوستار خطی باشد، مثل مجموعه‌ی تمامی اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ و کوچکتر یا مساوی ۱. فرض کنید M کلاس همه‌ی توابع تک ارزشی $f(x)$ باشد که فقط دو مقدار ۰ یا ۱ را می‌گیرند، که در آن x مقادیر حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ و کوچکتر یا مساوی ۱ را اختیار می‌کند.

Parikh sentences⁵

Lob's paradox⁶

Rice's theorem⁷

Shaughan Lavine⁸

ولی M همتوان L نیست. چون اگر M می‌توانست در یک تناظر یک به یک توسط متغیر z (از L) قرار بگیرد. پس M می‌توانست به عنوان یک تابع تک ارزشی $\phi(x, z)$ از دو متغیر x و z قلمداد شود، طوری که با هر جایگذاری z یک عضو $f(x) = \phi(x, z)$ از M بدست می‌آمد و بر عکس، هر عضو $f(x)$ از M می‌توانست با جایگذاری یک z مناسب در $\phi(x, y)$ بدست آید. به هر حال، این امر منجر به تناقض خواهد شد.

چون که اگر $g(x)$ تابع تک ارزشی باشد که روی x مقادیر 0 و 1 را می‌گیرد، طوری که متفاوت با $\phi(x, z)$ باشد، آنگاه از طرفی $g(x)$ هم عضو M است و از طرف دیگر نمی‌تواند از هیچ $\phi(x, z)$ ی برای مثلاً $z = z_0$ بدست آید، زیرا که $\phi(z_0, z_0)$ متفاوت از $g(z_0)$ می‌باشد.

فصل ۳

قضیه کانتور و تعمیم آن

۱.۳ قضیه کانتور

این فصل را با بیان مطالب پایه‌ای در رابطه با قضایای کانتور آغاز می‌کنیم. از لحاظ آموزشی، منطقی است که برای لحظه‌ای مطالب آغازین فصل بعد را مدنظر قرار دهیم که برهان نسخه‌ی آشناتر و ملموس تر قضیه کانتور ($\mathbb{N} \not\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$) و پارادکس نظریه مجموعه‌ای راسل را یادآوری می‌کند. حال قضیه‌ی اصلی کانتور را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱ (قضیه کانتور)

اگر Y یک مجموعه و تابع $\alpha : Y \rightarrow Y$ بدون نقطه ثابتی ($\forall y \in Y : \alpha(y) \neq y$) موجود باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی T و هر تابع $f : T \times T \rightarrow Y$ ، تابعی مانند $g : T \rightarrow Y$ موجود است به طوری که قابل نمایش با f نیست، یعنی برای هر $t \in T$ داریم $g(-) \neq f(-, t)$. برهان. فرض کنیم Y یک مجموعه بوده و $\alpha : Y \rightarrow Y$ تابعی بدون نقاط ثابت باشد. تابع $\Delta : T \rightarrow T \times T$ موجود است که هر $t \in T$ را به $(t, t) \in T \times T$ می‌نگارد. تابع $g : T \rightarrow Y$ را به عنوان ترکیب سه تابع به صورت دیاگرام زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f} & Y \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \alpha \\ T & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

به عبارت دیگر $g(t) = \alpha(f(t, t))$.

ادعا می‌کنیم برای هر $t \in T$ ، $g(-) \neq f(-, t)$ ، اگر $g(-) = f(-, t_0)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در t_0 داریم:

$$f(t_0, t_0) = g(t_0) = \alpha(f(t_0, t_0))$$

نخستین تساوی از نمایش پذیر بودن g و دومین تساوی از تعریف g ناشی می‌شود. اما این بدین معنی است که α نقطه ثابتی دارد. تناقض! □

تبصره ۱: واضح است که هر مجموعه Y با دو یا چند عضو، تابعی برای خود دارد که فاقد نقطه ثابتی است. در اینجا ما برای بحث درباره‌ی مجموعه‌ها و توابع، برخلاف صحبت در مورد اشیاء در یک رشته و هم‌ریختی‌های مابین این اشیاء، دچار دردسر و زحمت می‌شویم. شاید Y و T مجموعه‌هایی با ساختاری پیچیده‌تر (مثلاً جبری) باشند و توابع میان آنها حافظ این ساختار باشند. بعنوان مثال، ممکن است Y دارای ترتیب جزئی باشد و α باید ساختار ترتیبی را حفظ نماید. فقط چند نگاشت حافظ ترتیب (صعودی) از ترتیب جزئی Y به Y وجود دارد. ولی توابع زیادی از مجموعه Y به مجموعه Y وجود دارند. عبارات مشابه می‌توانند در ارتباط با هر ساختاری که روی Y بکار گرفته می‌شود، بیان گردند (بعنوان مثال فضای توپولوژی، گروه، شبکه کامل، ...). درون‌نگاشت‌های کمتری از Y وجود دارد اگر مصر به حفظ این ساختار توسط درون‌نگاشت‌ها باشیم. چنانچه به این واقعیت توجه نمایید که ممکن است با توابع مابین مجموعه‌ها سروکار نداشته باشیم، قضیه فوق محتوای بیشتری خواهد داشت.

تبصره ۲: نگاشت Δ قطری نامیده می‌شود و بسیاری از برهانها «استدلای قطری» خوانده می‌شوند. تابع f نوع خاصی از تابع ارزش گذاری است و $f(t, t)$ یک ارزش یابی از خود است (تابع خودش مقدار خودش را محاسبه می‌کند)، از اینرو این توابع «خودارجاع» و این استدلالها «استدلای خودارجاعی» نامیده می‌شوند.

تبصره ۳: ما مباحث لاوور و شانول [۱۷] را در استفاده از قضیه کانتور و عکس نقیض‌اش، که قضیه قطری نامیده می‌شود، ادامه خواهیم داد.

۲.۳ تعمیم قضیه کانتور

قضیه فوق را تعمیم می‌دهیم به طوری که به جای $\Delta = \langle Id, Id \rangle$ از $\langle Id, \beta \rangle$ برای یک تابع پوشای $\beta : T \rightarrow S$ (معکوس پذیر راست) استفاده می‌کنیم. از اینرو $\Delta : \langle Id, Id \rangle : T \rightarrow T \times T$ و $\langle Id, \beta \rangle : T \rightarrow T \times S$ هر t را به $(t, \beta(t))$ می‌نگارد.

روش بررسی این قضیه این است که بیان کنیم اگر تابع پوشای $\beta : T \rightarrow S$ موجود باشد آنگاه از طرفی $|S| \leq |T|$ و قضیه کانتور بیانگر اینست که $|T| \leq |Y^T|$ و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $|S| \leq |Y^T|$.

قضیه ۲ :

فرض کنید Y یک مجموعه و $\alpha : Y \rightarrow Y$ تابعی فاقد نقطه ثابت باشد و T, S مجموعه بوده و $\beta : T \rightarrow S$ تابعی پوشا باشد (یعنی یک وارون راست بصورت $\bar{\beta} : S \rightarrow T$ داشته باشد). آنگاه برای هر تابع $f : T \times S \rightarrow Y$ ، تابع $g_\beta : T \rightarrow Y$ که به صورت شکل زیر ساخته شده است، قابل نمایش با f نیست.

$$\begin{array}{ccc} T \times S & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \langle Id, \beta \rangle & & \downarrow \alpha \\ T & \xrightarrow{g_\beta} & Y \end{array}$$

برهان. فرض کنید Y ، α ، T و β داده شده باشند. فرض کنید که $\bar{\beta} : S \rightarrow T$ وارون راست β باشد. طبق تعریف

$$g_\beta(t) = \alpha(f(t, \beta(t))).$$

حال ادعا می‌کنیم که $(g_\beta(-) \neq f(-, s)) \forall s \in S$. اگر $g_\beta(-) = f(-, s_0)$ آنگاه با ارزش گذاری در $\bar{\beta}(s_0)$ داریم

$$\begin{aligned}
 f(\bar{\beta}(s_0), s_0) &= g_{\beta}(\bar{\beta}(s_0)) && \text{با توجه به نمایش پذیری } g_{\beta} \\
 &= \alpha(f(\bar{\beta}(s_0), \beta(\bar{\beta}(s_0)))) && \text{با توجه به تعریف } g_{\beta} \\
 &= \alpha(f(\bar{\beta}(s_0), s_0)) && \text{بنابر تعریف وارون راست}
 \end{aligned}$$

و این بدین معناست که α نقطه ثابتی دارد. $\square$

می‌توان قضیه را به روش دیگری بررسی نمود. مجموعه $S = T$ را مدنظر بگیرید و β را

متفاوت از Id_T فرض کنید. روش معمول برای تجسم قضیه کانتور به قرار زیر است.

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\dots$
t_1	$[y_3]$	y_7	y_{21}	y_2	y_4	$\dots$
t_2	y_1	$[y_{17}]$	y_2	y_7	y_{41}	$\dots$
t_3	y_0	y_3	$[y_7]$	y_2	y_{24}	$\dots$
t_4	y_9	y_7	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	y_2	$[y_4]$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

همه موارد در کروه‌های مربعی تغییر می‌یابند. مثلاً y_3 به $\alpha(y_3)$ تبدیل می‌شود. در هر

حال، با اندک تأملی نشان داده میشود که نیازی به رفتن در امتداد قطر نیست. روش قطری،

ساده‌ترین روش ممکن است. آنچه لازم است این است که هر ردیف از جدول حداقل تغییر

عضوی داشته باشد. بنابراین ممکن است تصویری شبیه به تصویر زیر داشته باشیم :

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\dots$
t_1	y_3	y_7	y_{21}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_2	$[y_1]$	y_{17}	$[y_2]$	y_7	y_{41}	$\dots$
t_3	y_0	y_3	y_7	y_2	$[y_{24}]$	$\dots$
t_4	y_9	$[y_7]$	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

این واقعیت که هر ردیف چیز تغییر یافته‌ای دارد ذاتاً به این حقیقت اشاره دارد که β

پوشاست. مادامی که β پوشاست، قضیه کانتور نیز برقرار خواهد بود.

با این نظر ممکن است پرسش زیر را بدون پاسخ دادن به آن مطرح کنیم. آیا باید واقعاً این قضایا را قضایای قطری بنامیم؟ آیا خودارجاعی واقعاً نقشی در اینجا دارد؟ با توجه به اینکه ما می‌توانیم همان پارادکس‌ها را بدون خودارجاعی بوجود آوریم، آیا اصل دور-باطل راسل به این ترتیب از بین خواهد رفت؟

فصل ۴

نمونه هایی از قضیه کانتور

۱.۴ قضیه کانتور

ما بحث را با نسخه‌ی آشناتر قضیه کانتور درباره‌ی مجموعه توانی از اعداد طبیعی شروع خواهیم نمود. سپس به پارادکس نظریه مجموعه‌ای راسل و سایر پارادکس‌ها خواهیم پرداخت. نخست دو مورد را کاملاً شرح می‌دهیم و از همین ایده و مفهوم بعنوان قضایایی در آخرین فصل استفاده خواهیم نمود. همچنین به سایر موارد با سرعت بیشتری خواهیم پرداخت:

قضیه کانتور $\mathbb{N} \not\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

قضیه بیان می‌کند که تابع پوشایی از $\mathbb{N}$ به $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ نمی‌تواند موجود باشد. فرض کنید $S_0, S_1, S_2, \dots$ یک شمارش پیشنهادی از تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ باشد. فرض کنید $2 = \{0, 1\}$ و تابع «نفی» $\alpha: 2 \rightarrow 2$ را در نظر می‌گیریم بطوریکه $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) = 0$. فرض کنید $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow 2$ به این شکل تعریف گردد:

$$f(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \in S_m \\ 0 & \text{اگر } n \notin S_m \end{cases}$$

که برای هر m ، تابع مشخصه S_m است:

$$f(-, m) = \chi_{S_m}$$

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

در حقیقت g تابع مشخصه مجموعه‌ی $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$ است.

ثابت می‌کنیم $(\chi_G = g(-) \neq f(-, m) = \chi_{S_m}) \forall m$. زیرا اگر m_0 ی موجود باشد به

طوری که $g(-) = f(-, m_0)$ آنگاه با ارزش گذاری در m_0 داریم

$$f(m_0, m_0) = g(m_0) = \alpha(f(m_0, m_0))$$

که در آن نخستین تساوی ناشی از این فرض است که g قابل نمایش با m_0 است و دومین تساوی تعریف g است. این بدین معنی است که عملگر نفی نقطه ثابتی دارد که بوضوح غلط است. به عبارت دیگر $G \subseteq \mathbb{N}$ در شمارش پیشنهادی تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ نیست. $\square$

۲.۴ پارادکس راسل

این پارادکس بیانگر اینست که مجموعه تمام مجموعه‌هایی که اعضای خودشان نباشند هم عضوی از خودش است و هم عضوی از خودش نیست. فرض کنید $\langle Sets \rangle$ یک مجموعه‌ی جهانی^۲ باشند. مجدداً تابع نفی $\alpha : 2 \rightarrow 2$ بطوریکه $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) = 0$ را مدنظر می‌گیریم.

فرض کنید $f : Sets \times Sets \rightarrow 2$ در مجموعه‌های s و t به شکل زیر تعریف شود:

$$f(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } s \in t \\ 0 & \text{اگر } s \notin t \end{cases}$$

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم :

$$\begin{array}{ccc} Sets \times Sets & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ Sets & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

universe²

در اصل g تابع مشخصه‌ی مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند. به ازای تمام مجموعه‌های t ، $g(-) \neq f(-, t)$. چون که اگر مجموعه t_0 موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-, t_0)$ آنگاه پس از ارزش‌گذاری در t_0 خواهیم داشت

$$f(t_0, t_0) = g(t_0) = \alpha(f(t_0, t_0))$$

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می‌شود. این بوضوح غلط است. بطور خلاصه، به منظور ایجاد این اطمینان که هیچ پارادکسی وجود ندارد ما بایستی بیان کنیم که g تابع مشخصه‌ی گردایه‌ای^۳ از مجموعه‌هاست اما این گردایه به شکل یک مجموعه نیست. $\square$

قبلاً در مورد پارادکس آرایشگر و دیگر پارادکس‌های خودارجاعی یادآور شدیم که می‌توانستند دقیقاً نظیر این عمل نمایند. پارادکس آرایشگر یک راه حل ساده داشت، مثلاً روستا را با این عبارت توصیف می‌نمود که روستایی وجود داشت که آرایشگر آن فقط آنهایی را اصلاح می‌کرد که خودشان نمی‌توانستند ریش خود را اصلاح کنند: چنین روستایی واقعاً وجود نداشت. ما همین مفهوم را درباره پارادکس راسل بکار می‌بریم، یعنی گردایه‌ای از مجموعه‌ها که شامل خودشان نیستند، به عنوان مجموعه وجود ندارند.

۳.۴ پارادکس گرلینگ

حال وارد مبحث پارادکس معنایی می شویم. پارادکس خودارجاعی گرلینگ در سال ۱۹۰۸ توسط کورت گرلینگ^۴ و لئونارد نلسون^۵ ارائه شد. بعضی از صفات وجود دارند که خودشان را توصیف می کنند و برخی وجود دارند که اینکار را انجام نمی دهند. بعنوان مثال *English* یک کلمه انگلیسی است. *French* یک کلمه فرانسوی نیست. *Polysyllabic* کلمه چندسیلابی است. *Monosyllabic* یک کلمه تک سیلابی نیست. تمام کلماتی را که خود را توصیف نمی کنند «خودنامصداق»^۶ می نامیم. حال از خود بپرسید که آیا «خودنامصداق» بودن خود نامصداق است؟ اگر پاسخ آری باشد، در نتیجه «خودنامصداق» خود مصداق است و این تناقض است. اگر پاسخ خیر باشد، پس «خودنامصداق» خود نامصداق است و این منجر به تناقض می شود. پس این کلمه خود نامصداق است اگر و تنها اگر خود نامصداق نیست!

مجموعه Adj را تمامی صفات انگلیسی در نظر بگیرید. تابع $f : Adj \times Adj \rightarrow 2$ را داریم

که برای تمامی صفات a_1 و a_2 بصورت زیر تعریف میشود:

$$f(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_1, a_2 \text{ را توصیف کند} \\ 0 & \text{اگر } a_1, a_2 \text{ را توصیف نکند.} \end{cases}$$

بنابراین ما ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} Adj \times Adj & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ Adj & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

Kurt Grelling⁴Leonard Nelson⁵heterological⁶

تابع g تابع مشخصه‌ی یک زیر مجموعه از صفاتی است که نمی‌توانند بوسیله خودشان توصیف شوند. این دقیقاً چیزی است که مفهوم $f(-, a) \neq g(-)$ ، برای تمامی صفات a بیان می‌کند. «خود نامصداق بودن» تنها صفت موجود در این زیر مجموعه نیست بلکه صفات دیگری نیز در این زیر مجموعه وجود دارند. برخی از مؤلفین از کلمه «غیر قابل استناد»^۷ برای تشریح این مفهوم بهره جسته‌اند. فرمول بندی ما شامل تمامی چنین صفات پارادکسی می‌شود. □

۴.۴ پارادکس دروغگو

قدیمی ترین مثال برای پارادکس خودارجاعی، پارادکس دروغگو (کرتی ها^۸) است. شخصی از کرت بیان می‌کند: «تمامی کرتی ها دروغگو هستند». مثالهایی از این قبیل زیادند: «این جمله غلط است» و «من دارم دروغ می‌گویم». پارادکس دروغگو به پارادکس گرلینگ شباهت زیادی دارد. با این حال در پارادکس گرلینگ با صفات سروکار داریم، لیکن در اینجا ما با جملات کامل سروکار داریم. پارادکس کواین^۹ یک مثال برجسته در این زمینه است:

«منجر به تناقض می‌شود، هرگاه به نقل قول خودش ملحق شود»

□ منجر به تناقض می‌شود، هرگاه به نقل قول خودش ملحق شود.

پارادکس قوی دروغگو^{۱۰}

راه حل متداول برای پارادکس دروغگو اینست که بگوییم جملات ویژه‌ای وجود دارند که نه درستند و نه غلط بلکه بی معنا هستند. جمله‌ی «من دروغگو هستم» از جمله‌ی چنین جملاتی است. این یک نوع منطق سه ارزشی است. به هر حال این یک راه حل نیست. جملات زیر را در

^۷impredicable

^۸Cretans

^۹Quine's paradox

^{۱۰}The strong Liar paradox

نظر بگیرید:

«منجر به تناقض یا بی معنایی می شود وقتی که به نقل قول خودش الحاق شود»

منجر به تناقض یا بی معنایی می شود وقتی که به نقل قول خودش الحاق شود.

اگر این جمله درست باشد، پس آن غلط یا بی معنی است. اگر جمله غلط باشد، پس آن

درست است و بی معنی نیست. اگر جمله بی معنی باشد، پس آن درست است و بی معنی نیست.

این پارادکس همچنین می تواند با طرح ما فرمول بندی شود. مجموعه جملات انگلیسی را

$Sent$ و مجموعه $3 = \{T, M, F\}$ (یعنی درست، M یعنی بی معنی، F یعنی غلط) را در نظر

بگیرید. حال تابع زیر را در نظر می گیریم $f : Sent \times Sent \rightarrow 3$ که برای تمامی جملات s_1, s_2

تعریف شده است:

$$f(s_1, s_2) = \begin{cases} T & \text{اگر } s_1, s_2 \text{ را توصیف کند} \\ M & \text{اگر برای } s_2, \text{ توصیف کردن } s_1 \text{ بی معنی باشد} \\ F & \text{اگر } s_1, s_2 \text{ را توصیف نکند} \end{cases}$$

حال تابع $\alpha : 3 \rightarrow 3$ را در نظر بگیرید به طوری که $\alpha(T) = F$ و $\alpha(M) = \alpha(F) = T$

ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ccc} Sents \times Sents & \xrightarrow{f} & 3 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ Sents & \xrightarrow{g} & 3 \end{array}$$

در حقیقت g تابع مشخصه جملاتی است که نه غلط اند و نه بی معنی، زمانی که خودشان

را توصیف می کنند. منظور از تابع مشخصه جملاتی هستند که g آنها را به T (به عنوان عکس

M یا F) می نگارد. به ازای تمام جملات s داریم $g(-) \neq f(-, s)$. چون اگر جمله s_0 موجود

باشد به طوری که $g(-) = f(-, s_0)$ آنگاه پس از ارزش گذاری در s_0 خواهیم داشت

$$f(s_0, s_0) = g(s_0) = \alpha(f(s_0, s_0))$$

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می شود. این بوضوح غلط است. $\square$

۵.۴ پارادکس ریچارد

جملات زیادی در زبان طبیعی وجود دارند که اعداد حقیقی مابین 0 و 1 را توصیف می کنند. فرض کنید تمام جملات طبیعی را به ترتیب الفبایی مرتب کنیم. با استفاده از این ترتیب، می توانیم همه این جملات که اعداد مابین 0 و 1 را توصیف می کنند را انتخاب کنیم. مثلاً « x نسبت مابین محیط دایره و قطر دایره ای است که بر 10 تقسیم شده است»، عدد $0.314159 \dots = \pi/10$ را توصیف می کند. جملات مشابه زیادی از این نوع وجود دارند. چنین جمله ای را «جمله ی ریچارد» می نامیم. بنابراین ما مفهوم «جمله ی m -ام ریچارد» را داریم. مجموعه $10 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید و تابع $\alpha : 10 \rightarrow 10$ را به صورت $\alpha(i) = 9 - i$ تعریف کنید. این تابع نقطه ثابتی ندارد. حال تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow 10$ را مدنظر بگیرید که به شکل زیر تعریف شده است :

$$f(n, m) = n - \text{ام ریچارد جمله } m$$

بعنوان مثال، اگر جمله ی توصیف کننده $\pi/10$ در پاراگراف بالا جمله پانزدهم ریچارد باشد، آنگاه $f(4, 15) = 1$ چون 1 در $0.314159 \dots$ یعنی چهارمین عدد اعشاری جمله ی پانزدهم ریچارد برابر 1 است.

حال به ساختار $10 : \mathbb{N} \rightarrow$ که به شکل دیاگرام زیر است توجه کنید:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & 10 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & 10 \end{array}$$

تابع g یک عدد حقیقی مابین 0 و 1 را توصیف می‌کند به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$

داریم

$$g(-) \neq f(-, m)$$

یعنی این عدد، متفاوت از جملات ریچارد است. با این حال در اینجا یک جمله ریچارد وجود دارد که این عدد را توصیف می‌کند:

x یک عدد حقیقی میان 0 و 1 است که رقم n ام آن 9 منهای رقم n ام عددی است که بوسیله‌ی جمله‌ی n ام ریچارد توصیف شده است.

چرا این پارادکس باقی می‌ماند؟ طرح ما محدودیتی از «جملات ریچارد» را پیشنهاد می‌کند. با این وجود بنا به دلایلی این پارادکس حفظ می‌شود (باقی می‌ماند). ¹¹ جی کانگل معتقد است که «جملات ریچارد» یک مفهوم خوش تعریف نیستند. جمله‌ی زیر را ملاحظه نمایید:

«اگر حدس گلدباخ صحیح باشد، فرض کنید x یک گاو قرمز باشد و در غیر این صورت x

را عدد $3/4$ بگیرید.»

آیا این جمله یک عدد حقیقی را توصیف می‌کند؟ آیا این جمله، یک جمله از «جملات ریچارد» است؟ حتی اگر بدانیم که جمله‌ای از «جملات ریچارد» است قادر به تعیین اینکه، این

¹¹ Jay Kangel

جمله چه عددی را توصیف می کند نیستیم. همچنین روشن نیست که جمله ریچارد زیر چه عددی را توصیف می کند: «اگر فرضیه ریمان صحیح باشد، x را $1/4$ قرار دهید و در غیر این صورت x را $3/4$ قرار دهید.» با توجه به اینکه مجموعه جملات ریچارد خوش تعریف نیستند و همچنین تابع f خوش تعریف نیست، جای تعجب نیست که این پارادکس حفظ شود. $\square$

۶.۴ مسأله توقف تورینگ

فرمول بندی زیر از دو اثر شگرف هلر^{۱۲} در نظریه رسته های بازگشتی [۹] و مانین^{۱۳} در نظریه محاسبات کلاسیک و کوانتوم [۱۹] الهام گرفته شده است. برای این نمونه ما از جهان راحت و ساده مجموعه ها و توابع صرف نظر خواهیم نمود. در این نمونه ما بایستی درباره جهان های محاسبه پذیر سخن بگوییم. یک جهان محاسبه پذیر، یک رسته U با دو ویژگی زیر می باشد:

(۱) $\mathbb{N}$ و ۲ اشیایی در U هستند.

(۲) برای هر شیء C در U ، نوعی شمارش از اعضای C وجود دارد. یک شمارش از اعضای C ، یک یکریختی (ایزومورفیسم) تام $e_C : \mathbb{N} \rightarrow C$ است. مجموعه ی C باید به عنوان یک مجموعه از اشیای محاسبه پذیر مانند درختها، گراف ها، اعداد، بسته ها، رشته ها، ... در نظر گرفته شود.

(۳) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \rightarrow C'$ یک عدد متناظر $\lceil f \rceil \in \mathbb{N}$ موجود است. این عدد به عنوان عدد گودلی برنامه ای که f را محاسبه می کند، در نظر گرفته می شود.

(۴) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \rightarrow C'$ یک مجموعه $r.e.$ متناظر $W_f \subseteq \mathbb{N}$ موجود است که به صورت $\{ \text{تعریف شده } x | f(x) \}$ $W_f = \text{dom}(f)$ می باشد. برای هر $c \in C$ ، f مقداری در c

Heller¹²Manin¹³

دارد اگر و تنها اگر $e_C^{-1}(c) \in W_f$. برای بار دیگر f بایستی تابع جزئی از یک دامنه محاسبه پذیر به دامنه دیگری در نظر گرفته شود. تابع توقف در جهان محاسبه پذیر باید یک تابع تام در U باشد $Halt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow 2$ به طوری که برای هر $f : C \rightarrow C'$ داریم $Halt(-, \ulcorner f \urcorner) = \chi_{W_f}$. این بیانگر اینست که $Halt$ (توقف) باید قادر به بیان این باشد که برای چه مقادیری در C محاسبه توقف می کند. قرار دهید

$$Halt(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \in W_m \\ 0 & \text{اگر } n \notin W_m. \end{cases}$$

تابع $\alpha : 2 \rightarrow 2$ به این صورت تعریف شود: $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) \uparrow$ ، یعنی محاسبه تعریف نشده است.

تابع g را به شکل زیر می سازیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

این بخش را با نشان دادن این که $Halt$ تام نیست چون در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف نشده است، به پایان می بریم. اگر $Halt$ در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف شده باشد آنگاه ما به تناقض خواهیم رسید. چون اگر $\ulcorner g \urcorner \in W_{\ulcorner g \urcorner}$ ، با استفاده از تعریف $Halt$ داریم:

$$Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 1$$

$$g(\ulcorner g \urcorner) \downarrow$$

با استفاده از توقف g

$$g(\ulcorner g \urcorner) = \alpha Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = \alpha(1) \uparrow$$

با استفاده از تعریف g

$$Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 0$$

به عبارتی خواهیم داشت

□ از این رو هیچ تابع $Halt$ تامی با شرایط فوق نمی تواند وجود داشته باشد.

۷.۴ یک زبان غیر $r.e.$

می خواهیم نشان دهیم زبانی وجود دارد که بوسیله هیچ ماشین تورینگ پذیرفته نمی شود. فرض کنید $M_0, M_1, M_2, \dots$ شمارشی از تمام ماشینهای تورینگ در زبان ورودی $\Sigma = \{0, 1\}$ باشند.

کلمات Σ^* را بدین صورت مرتب می کنیم: قرار دهید $u < v$ هرگاه

یا (۱) طول u کوچکتر از طول v باشد؛

یا (۲) طول u برابر طول v بوده و u در ترتیب الفبایی ($0 < 1$) قبل از v قرار گیرد.

برای کلمه $w \in \Sigma^*$ عدد $\langle w \rangle \in \mathbb{N}$ جایگاه w را در ترتیب بالا مشخص می کند. به عبارت دیگر

عدد $\langle w \rangle$ کد کلمه w می باشد. بنابراین جدولی به شکل زیر خواهیم داشت.

0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	...	w	...
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	...	$\langle w \rangle$	...

تابع $f: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow 2$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(w_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } w_i, \text{ بوسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته شده باشد} \\ 0 & \text{اگر } w_i, \text{ بوسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته نشده باشد} \end{cases}$$

پس ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* \times \Sigma^* & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ \Sigma^* & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

که تابع مشخصه زبانی است که توسط هیچ ماشین تورینگ پذیرفته نمی شود. البته این واقعیت که زبانهای غیر $r.e$ ای وجود دارد از مباحث شمارشی ساده ای نتیجه می شود: چون تعداد ماشین های تورینگ شماراست و تعداد زبانهای روی Σ^* ناشماراست. $\square$

۸.۴ یک اراکل B بطوریکه $P^B \neq NP^B$

منظور از زمان اجرا تعداد حرکاتی است که ماشین با یک ورودی داده شده، قبل از توقف انجام داده و احتمالاً به خروجی منجر می شود. پس زمان اجرا متأثر از دو مولفه ماشین و ورودی داده شده می باشد.

تابع پیچیدگی زمان محاسبه: به عنوان نمونه برای n داده شده تمام کلمات با طول n را در نظر می گیریم. با دادن این کلمات به عنوان ورودی، ماشین برای هر کلمه یک زمان محاسبه صرف می کند. ماکزیمم زمان محاسبه برای n ثابت تابع پیچیدگی زمانی نامیده می شود. تابع پیچیدگی زمانی بستگی به ماشین تورینگ دارد. کلمات با طول n در زمان $f(n)$ محاسبه می شوند.

$$Tim_M(n) \longrightarrow f(n)$$

قرار می دهیم:

$P =$ تمام مسائلی که می توانند در زمان چند جمله ای بطور قطعی حل شوند

$NP =$ تمام مسائلی که در زمان چند جمله ای با ماشین های غیر قطعی قابل حل هستند

با توجه به تعریف فوق داریم $P \subseteq NP$. ماشین تورینگ با اراکل B ، ماشین تورینگ معمولی با این خاصیت اضافی است که هر لحظه که بخواید جواب سؤال $x \in B$ را در یک واحد زمان پیدا کند. با ثابت نگهداشتن B ، P^B مجموعه تمام مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای توسط ماشین های تورینگ قطعی با اراکل B قابل حل اند و NP^B مجموعه تمام مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای توسط ماشین های تورینگ قطعی با اراکل B قابل حل اند.

یکی از مهمترین سؤالات مطرح شده در علوم کامپیوتر اینست که آیا P ، مجموعه تمامی مسائلی که می‌توانند توسط ماشین تورینگ قطعی در زمان چندجمله‌ای حل شوند، با مجموعه NP ، مجموعه تمامی مسائلی که می‌توانند توسط ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان چندجمله‌ای حل شوند، برابر است یا نه؟

ما در این پایان نامه به این مسأله جایزه دار روز پاسخ نخواهیم داد، بلکه به سؤال مرتبط دیگری پاسخ خواهیم داد. به همین سؤال در خصوص ماشین های تورینگ اراکل دار توجه می‌کنیم. یک ماشین تورینگ اراکل دار، ماشین تورینگی با یک مجموعه‌ی مرتبط B است، به طوری که ماشین تورینگ می‌تواند عضویت هر کلمه‌ای در B را در زمان واحد تعیین کند. برای مجموعه داده شده B ، مجموعه‌های مشابه P^B و NP^B را می‌توان درست کرد.

پیپر^{۱۴}، گیل^{۱۵} و سولووی^{۱۶} [۸] ثابت کرده‌اند که مجموعه‌ی A ای وجود دارد به طوری که $P^A = NP^A$ و یک مجموعه‌ی B وجود دارد به طوری که $P^B \neq NP^B$. در اینجا نتیجه دوم را ثابت خواهیم نمود. حال جهت تکمیل مبحث این قسمت قضیه‌ی زیر از [۱۰] بیان و اثبات می‌شود.

قضیه: یک اراکل B موجود است به طوری که $P^B \neq NP^B$.

Baker¹⁴Gil¹⁵Solovay¹⁶

برهان. دنبال اراکل B و زبان $L_B \subseteq \{0, 1\}^*$ هستیم به طوری که $L_B \in NP^B$ ولی $L_B \notin P^B$.
 طرز ساختن B : روی الفبای $\{0, 1\}$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ حداکثر یک کلمه با طول m در B قرار می دهیم. سایر کلمات با طول m را کلمات ممنوعه می نامیم. تمام ماشین های تورینگ به صورت $M_1, M_2, M_3, \dots$ را با روش قطری لیست می کنیم، به طوری که هر ماشین بی نهایت بار ظاهر شود:

$$M_1, M_1 \ M_2, M_1 \ M_2 \ M_3, M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4, \dots$$

B_0 را تهی قرار می دهیم. با داشتن B_i می خواهیم B_{i+1} و در نهایت $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ را بسازیم. ماشین M_i با اراکل B_i روی ورودی 0^i را اجرا می کنیم. در $M_i^{B_i}$ ، اگر سؤال $x \in B_i$ پرسیده شود که طول x کوچکتر از i است آنگاه اراکل B_i جواب بلی یا خیر خواهد داد. اگر $M_i^{B_i}$ سؤال $y \in B_i$ را بپرسد که y طول بزرگتر یا مساوی i دارد، فرض کنیم y در B نیست (یعنی y را جزء کلمات ممنوعه قرار دهیم). اجرای $M_i^{B_i}$ روی 0^i را تا $i^{\log i}$ مرحله انجام می دهیم. اگر در این تعداد مرحله، $M_i^{B_i}$ توقف کرده، 0^i را رد کند ما کلمه ای با طول i را که ممنوعه نیست در B_{i+1} قرار می دهیم (در صورت وجود). اگر $M_i^{B_i}$ ، 0^i را در $i^{\log i}$ مرحله رد نکند، آنگاه هیچ کلمه ای با طول i در B_{i+1} قرار نمی دهیم.

تعداد کلمات ممنوع شده توسط $M_1, M_2, M_3, \dots, M_i$ حداکثر برابر است با

$$\sum_{j=1}^i j^{\log j} \leq i(i^{\log i}) = i^{1+\log i} < 2^i$$

با توجه به رابطه فوق $2^i < i^{1+\log i}$ زمانی برقرار است که رابطه $i < \log i(1 + \log i)$ درست باشد. منتهی رابطه اخیر بازای $i \geq 32$ صادق خواهد بود. پس برای $i \geq 32$ ما کلمات غیر ممنوعه خواهیم داشت. (همه را نمی توان ممنوعه کرد یعنی B_{i+1} تهی نخواهد بود). پس اراکل B تعریف

شد. حال زبان L_B را بدین صورت تعریف می‌کنیم: مجموعه 0^i هایی که B کلمه ای به طول i دارد: $\{B \text{ شامل کلمه‌ای با طول } i \text{ است} \mid 0^i\}$.

برای اثبات کافیت نشان دهیم $L_B \in NP^B - P^B$. بوضوح $L_B \in NP^B$ زیرا برای 0^i داده شده کلمه‌ای با طول i روی 1 و 0 حدس زده و چک می‌کنیم که آیا در B هست یا نه؟ اگر در B بود پس 0^i در L_B هست و در غیر این صورت حدس دیگری می‌زنیم. ولی اینکه L_B در P^B نیست، از استدلال قطری نتیجه می‌شود.

اگر $L_B \in P^B$ ، پس ماشین تورینگ با اراکل B در زمان چند جمله‌ای P مثل M^B ، زبان L_B را می‌پذیرد. اگر کد این ماشین k باشد پس M_k^B ، L_B را می‌پذیرد. می‌توان فرض کرد $k \geq 32$ و نیز $k^{\log k} \geq p(k)$ زیرا هر ماشین تورینگ بی‌نهایت کد دارد. اگر M_k^B ، 0^k را بپذیرد، پس 0^k در L_B هست و در نتیجه B کلمه ای به طول k دارد و این امر زمانی ممکن است که $M_k^{B_k}$ ، 0^k را رد کند. از آنجایی که M_k^B و $M_k^{B_k}$ باید عین هم با ورودی 0^k عمل کنند. (چون که B و B_k کلمات یکسانی با طول کوچکتر از k دارند و نیز B کلمه ای با طول بزرگتر از k که $M_k^{B_k}$ در ورودی 0^k از اراکل استفاده کند، ندارد) پس به تناقض می‌رسیم. یعنی از پذیرفتن ورودی 0^k این نتیجه حاصل می‌شود که $M_k^{B_k}$ ، 0^k را نمی‌پذیرد یعنی M_k^B ، 0^k را نمی‌پذیرد!

حال اگر M_k^B ، 0^k را رد کند پس 0^k در L_B نیست پس $M_k^{B_k}$ نمی‌تواند 0^k را در $k^{\log k}$ رد کند (طبق تعریف و با توجه به اینکه $k \geq 32$). اگر $M_k^{B_k}$ ورودی 0^k را در $k^{\log k}$ مرحله رد کرده بود آنگاه هنوز کلمه‌ای با طول k که در لیست ممنوعه نبود وجود می‌داشت و کلمه‌ای با طول k بایستی در B بیفتد، پس 0^k باید در L_B می‌بود. در نتیجه M_k^B ، 0^k را در $k^{\log k}$ مرحله رد نمی‌کند. اما از آنجایی که $k^{\log k} \geq p(k)$ ، بنابراین M_k^B ، ورودی 0^k را هرگز نمی‌تواند رد کند و این تناقض است. بنابراین $L_B \notin P^B$.

□

در ادامه مبحث می توان همان قضیه فوق را در قالبی کلی تر به صورت زیر بیان و فرمول بندی نمود.

فرض کنید $M_0^?, M_1^?, M_2^?, \dots$ شمارشی از تمامی ماشین های تورینگ اراکل دار قطعی در زمان چند جمله ای روی الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ باشد. دنباله متناظر چند جمله ایهای $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ را در نظر بگیرید که بیانگر زمان اجراء در بدترین حالت برای هر ماشین باشد.

برای هر تابع $f : \Sigma^* \times \mathbb{N} \rightarrow 2$ و بازای هر $i \in \mathbb{N}$ یک تابع مشخصه روی مجموعه ی Σ^* است. ما اغلب یک مجموعه و تابع مشخصه اش را به یک مفهوم خواهیم گرفت. فرض کنید که $\bar{f}(-, i)$ دلالت بر تابع مشخصه متمم $f(-, i)$ دارد، یعنی $\bar{f}(-, i)$ مجموعه ی x هایی است که $f(x, i)$ برابر ۰ است. فرض کنید $\bar{F}(-, i)$ تابع مشخصه ی اجتماعی زیر باشد:

$$\bar{F}(-, i) = \bigcup_{j \leq i} \bar{f}(-, j)$$

ما $f(-, -)$ را به صورت استقرایی تعریف خواهیم کرد. $\forall w \in \Sigma^* : f(w, 0) = 1$. برای $w \in \Sigma^*$ و $i \in \mathbb{N} - 0$ داریم $f(w, i) = 0$ اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $(\forall w' < w) f(w', i) = 1$ که در آن $<$ یک ترتیب صفحه ی (۵۱) روی کلمات Σ^* است. این اطمینان را می دهد که فقط یک کلمه ی مورد قبول B برای هر i وجود دارد.

(۲) $M_i^{\overline{F(-, i)}}$ در $i^{\log i}$ مرحله، $0^{|w|}$ را رد می کند.

(۳) در $M_j^{\overline{F(-, j)}}$ ($\forall j < i$) با ورودی $0^{|w|}$ ، سؤال $w \in \overline{F(-, j)}$ در $j^{\log j}$ مرحله پرسیده نمی شود.

حال که این f تعریف شد، تابع g را به شکل زیر می سازیم:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \langle ID, \beta \rangle & & \downarrow \alpha \\ \Sigma^* & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

که در آن $\alpha(1) = 0$ و $\alpha(0) = 1$ ، $\beta(w) = |w|$

تساوی $g(w) = 1$ برقرار است اگر و تنها اگر $f(w, |w|) = 0$ اگر و تنها اگر سه شرط فوق محقق شود.

g تابع مشخصه مجموعه ی $B \subseteq \Sigma^*$ می باشد. حال زبانی به شکل زیر می سازیم

$$L_B = \{0^i \mid i \text{ است}\}$$

این زبان به سادگی می تواند بوسیله ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان خطی تعیین شود. در ورودی 0^i ، ماشین تورینگ غیرقطعی به طور ساده یک رشته ی w از طول i را حدس زده و بررسی می کند آیا در مجموعه ی B هست یا نه؟ از اینرو $L_B \in NB^B$. در مقایسه، به دلیل شرط (۲) بالا L_B نمی تواند بوسیله هیچ ماشین تورینگ قطعی در زمان چند جمله ای شناخته شود، یعنی $\forall m (g(-) \neq f(-, m))$. $\square$

۹.۴ پارادکس سفر در طول زمان

اگر مسافرت در زمان ممکن بود، یک مسافر زمان شاید می توانست در زمان به عقب برگردد و پدر بزرگ مجرد خود را بکشد، پس اطمینان حاصل نماید که مسافر زمان دیگر هرگز بدنیا نخواهد آمد. اگر او هرگز بدنیا نیامده بود، آنگاه او هیچ وقت نمی توانست پدر بزرگ خود را بکشد. برای بدست آوردن چنین نتایج تناقض آمیزی هیچ دلیلی وجود ندارد که مرتکب قتل شویم: مسافر

زمان می‌تواند با برگشت به زمان پیشین اطمینان حاصل نماید که والدین مجرد او هرگز با هم ملاقات نمی‌کنند.

این پارادکس های خودارجاعی می‌تواند در طرح ما بکار گرفته شوند. نکته کلیدی زیر از مفاهیم مهم آن می‌باشد. مسافر زمان نباید به پدر بزرگش شلیک کند (البته علاوه بر دلایل اخلاقی)، نه بخاطر اینکه او دیگر بدنیا نخواهد آمد، بلکه بدین دلیل که اگر بخواهد پدر بزرگش را بکشد قادر نخواهد بود که در زمان به عقب برگردد. این خودارجاعی است. مسافر زمان خودارجاع نیست، بلکه رخداد (حادثه) خودارجاع است.

با این تصور، ما مجموعه‌ی $Events$ را تمامی رویدادهای ممکن در زمان فضای ۴- بعدی توصیف می‌کنیم. مجموعه $Events$ ساختار زیادی دارند. در واقع، کل هدف علم فیزیک، کشف این ساختار اضافی است. ما تا بحال، آن را فقط به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم. تابع زیر را داریم

$$f : Events \times Events \rightarrow 2$$

که برای رویدادهای e_1 و e_2 به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(e_1, e_2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } e_2, \text{ با } e_1 \text{ سازگار باشد} \\ 0 & \text{اگر } e_2, \text{ با } e_1 \text{ ناسازگار باشد} \end{cases}$$

به عنوان مثال قرار می‌دهیم:

A = (خورشید در زمان و مکان ویژه ای طلوع می‌کند)

B = (خورشید در زمان و مکان ویژه ای طلوع نمی‌کند)

C = (علی اکنون در نیویورک توپ بازی می‌کند)

D = (سارا اکنون در کالیفرنیا زندگی می‌کند)

$E =$ (جک پدر بزرگ مجردش را می کشد)

$F =$ (جک متولد می شود)

با توجه به تعریفی که نمودیم، خواهیم داشت: $f(A, B) = 0$ و $f(C, D) = 1$ و $f(E, F) = 0$ حال ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} Events \times Events & \xrightarrow{f} & 2 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ Events & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

g تابع مشخصه‌ی رویدادهایی است که با خودشان ناسازگاری دارند. این رویدادها با رویدادهای دیگر نمی‌توانند در جهان ما وجود داشته باشند.

در سال ۱۹۴۹، کورت گودل^{۱۷} مقاله‌ای درباره‌ی نظریه‌ی نسبیت نوشت. در این مقاله گودل یک مدل ریاضی ساخت که در آن سفر در طول زمان محتمل بود. در صفحه ۱۶۸ [۲۵]، رودی روکر^{۱۸} مصاحبه‌ای را با گودل شرح می‌دهد که در آن روکر درباره پارادکس‌های مسافر زمان سؤالاتی می‌پرسد. گودل پاسخ می‌دهد که دنیا به سادگی به شما اجازه نخواهد داد که پدر بزرگتان را بکشید. درست مثل اینکه P و $\neg P$ هر دو نمی‌توانند صحیح باشند، بنابراین دنیا به شما اجازه نخواهد داد که باعث یک تناقض شوید. جملات گودل بدین صورت هستند: «سفر در زمان محتمل است، اما هیچ شخصی نمی‌تواند گذشته‌ی خویش را بکشد». سپس گودل می‌خندد و نتیجه‌گیری می‌کند که «قیاس مورد غفلت واقع شده است. منطق خیلی قدرتمند است».

Kurt Gödel¹⁷

Rudy Rucker¹⁸

فصل ۵

قضیه قطری و نمونه هایی از قضایای قطری

عکس نقیض قضیه کانتور نیز از اهمیت یکسانی برخوردار است.

قضیه ۳ (قضیه قطری)

اگر Y یک مجموعه باشد و مجموعه T و تابع $f : T \times T \rightarrow Y$ داده شده باشند به طوری که تمام توابع $g : T \rightarrow Y$ بوسیله f قابل نمایش باشند (عضو $t \in T$ وجود داشته باشد که $g(-) = f(-, t)$)، آنگاه هر تابع $\alpha : Y \rightarrow Y$ یک نقطه‌ی ثابت دارد. برهان. برهان ساختاری است. فرض کنید f, T, Y و α داده شده باشند. پس تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \alpha \\ T & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

در حقیقت تابع g به شکل زیر تعریف شده است

$$g(m) = \alpha(f(m, m)).$$

از آنجایی که فرض کرده‌ایم g بوسیله $t \in T$ قابل نمایش است، داریم

$$g(m) = f(m, t).$$

و بنابراین ما نقطه‌ی ثابتی برای α در $y_0 = g(t)$ را داریم. در نتیجه با استفاده از نمایش پذیری و تعریف g داریم: $\alpha(g(t)) = (\alpha(f(t, t))) = g(t)$. $\square$

تبصره ۴:

توجه به این نکته مهم است که قضیه فرض قویتری از آن دارد که در اثبات بکار برده شده است. قضیه می‌خواهد که تمام $g : T \rightarrow Y$ ها قابل نمایش باشند، اما اثبات فقط از این حقیقت

استفاده می کند که تابع g که در بالا ساخته شده است، قابل نمایش باشد. در آینده، ما از این حقیقت استفاده خواهیم کرد و فقط از نمایش پذیری g ساخته شده استفاده خواهیم نمود.

جبر لیندنبام – تارسکی^۱

در منطق ریاضی، جبر لیندنبام یا لیندنبام – تارسکی از نظریه منطقی T ، شامل کلاسهای هم ارزی از جملات نظریه است که تحت رابطه $\sim$ تعریف شده اند به طوری که $p \sim q$ اگر p و q به صورت اثبات پذیر منطقی در T معادل باشند. به عبارت دیگر، دو جمله معادلند اگر نظریه T اثبات کند که هر یک دیگری را نتیجه می دهد.

فرض کنید L یک زبان گزاره ای کلاسیک باشد. رابطه ی هم ارزی $\sim$ را روی فرمولهایی از L با $p \sim q$ تعریف می کنیم اگر و تنها اگر $\vdash p \Leftrightarrow q$. فرض کنیم $B = L / \sim$ مجموعه کلاسهای هم ارزی باشد. عملگرهای عطف $\wedge$ ، فصل $\vee$ و متمم گیری $[p]'$ روی B به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[p] \vee [q] := [p \vee q] \quad (۱)$$

$$[p] \wedge [q] := [p \wedge q] \quad (۲)$$

$$[p]' := [\neg p] \quad (۳)$$

با فرض $[p \vee \neg p] = 1$ و $[p \wedge \neg p] = 0$ ، آنگاه ساختار $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ یک جبر بولی است که جبر لیندنبام – تارسکی در زبان گزاره ای L نامیده می شود. برعکس، بازای هر جبر بولی شمارای B ، یک نظریه ی T از منطق گزاره ای موجود است به طوری که جبر لیندنبام – تارسکی از T به B یکرخت^۲ باشد. بعبارت دیگر، هر جبر بولی یک جبر لیندنبام – تارسکی است.

^۱Lindenbaum-Tarski

^۲isomorphic

۱.۵ لم قطری

ما از زبان و نمادگذاری کتاب مندلسون [۲۰] استفاده می‌کنیم. $\ulcorner B(x) \urcorner$ عدد گودلی $B(x)$ است. تابع $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف می‌شود: برای هر $B(x)$ ای که B یک عبارت منطقی با تنها متغیر آزاد x است، قرار می‌دهیم:

$$D(\ulcorner B(x) \urcorner) = \ulcorner B(\ulcorner B(x) \urcorner) \urcorner.$$

قضیه: (لم قطری)

برای هر فرمول خوش ساخت 3 (wff)، $\mathcal{E}(x)$ با x به عنوان تنها متغیر آزادش، یک فرمول بسته (جمله) $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $\vdash C \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner)$.

برهان. فرض کنید $Lind^i$ مجموعه کلاسهای جبری لیندنبام از فرمول های خوش ساخت با تعداد i تا متغیر آزاد باشد. دو فرمول خوش ساخت معادلند، اگر آنها به صورت اثبات پذیر منطقی معادل باشند. فرض کنید $f : Lind^1 \times Lind^1 \rightarrow Lind^0$ برای دو wff $B(x)$ و $\mathcal{H}(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(B(x), \mathcal{H}(y)) = \mathcal{H}(\ulcorner B(x) \urcorner)$$

فرض کنید که عملگر $\Phi_{\mathcal{E}}$ روی $Lind^0$ ، به این صورت تعریف شده باشد $\Phi_{\mathcal{E}} : Lind^0 \rightarrow Lind^0$ که $P \mapsto \Phi_{\mathcal{E}}(P) = \mathcal{E}(\ulcorner P \urcorner)$ با استفاده از این توابع، آنها را برای ساختن g به شکل زیر ترکیب می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} Lind^1 \times Lind^1 & \xrightarrow{f} & Lind^0 \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \Phi_{\mathcal{E}} \\ Lind^1 & \xrightarrow{g} & Lind^0 \end{array}$$

³فرمول خوش ساخت = wff = well-founded formula

با استفاده از تعریف داریم:

$$g(\mathcal{B}(x)) = \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(x))) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner)$$

ثابت می‌کنیم g با $\mathcal{G}(x) = \mathcal{E}(D(x))$ نمایش پذیر است. چون که

$$g(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner) = \mathcal{E}(D(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner)) = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) = f(\mathcal{B}(x), \mathcal{G}(x))$$

بنابراین نقطه ثابت $\Phi_{\mathcal{E}}$ در $\mathcal{C} = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner)$ باید موجود باشد، چرا که:

$$\mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner) \urcorner) = \Phi_{\mathcal{E}}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner) \urcorner) \quad \text{بنابر تعریف } \Phi_{\mathcal{E}}$$

$$= \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x))) \quad \text{بنابر تعریف } f$$

$$= g(\mathcal{G}(x)) \quad \text{بنابر تعریف } g$$

$$= f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x)) \quad \text{بنابر نمایش پذیری } g$$

$$= \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner) \quad \text{بنابر تعریف } f$$

□

۲.۵ نخستین قضیه ناتمامیت گودل

فرض کنید $\text{Proof}(y, x)$ محمول « y عدد گودلی یک اثبات از جمله‌ای است که عدد گودلی آن x

است» باشد. سپس فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv (\forall y) \neg \text{Proof}(y, x).$$

نقطه‌ی ثابت $\mathcal{G}$ برای $\mathcal{E}(x)$ در یک نظریه سازگار و نظریه ω - سازگار، جمله‌ای است که معادل با اثبات ناپذیری اش است.

نظریه T را ω - سازگار گویند هرگاه برای هر فرمول $\phi(x)$ ، اگر $\forall n \in \mathbb{N} \ T \vdash \phi(\bar{n})$ آنگاه $T \not\vdash \neg \forall \phi(x)$.

قضیه: اگر ω - سازگار باشد آنگاه جمله گودل $\mathcal{G}$ وجود دارد که $T \not\vdash \mathcal{G}$ و $T \not\vdash \neg \mathcal{G}$.
برهان.

قرار دهید $\mathcal{G}$ نقطه ثابت $\mathcal{E}(x)$ باشد یعنی $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. اگر $T \vdash \mathcal{G}$ آنگاه خواهیم داشت $\exists n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ و در نتیجه $T \vdash \exists x \neg \text{Proof}(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. پس داریم $T \vdash \neg \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ یا معادلاً $T \vdash \neg \mathcal{G}$ و این تناقض است. از طرف دیگر اگر $T \vdash \neg \mathcal{G}$ ، خواهیم داشت: $T \vdash \exists x \text{Proof}(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. چون T سازگار است پس $T \not\vdash \mathcal{G}$. پس $\text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ نادرست است یا $\neg \text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. پس $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg \text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. در نتیجه بنا به ω - سازگاری داریم $T \not\vdash \exists x \text{Proof}(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ یا $T \not\vdash \neg \mathcal{G}$ و این تناقض است. $\square$

۳.۵ قضیه ناتمامیت گودل - راسر

فرض کنید $\text{Neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ برای اعداد گودلی به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{Neg}(\ulcorner B(x) \urcorner) = \ulcorner \neg B(x) \urcorner$$

فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv \forall y \left(\text{Proof}(y, x) \rightarrow \exists w (w < y \wedge \text{Proof}(w, \text{Neg}(x))) \right)$$

محمول اثبات پذیری راسر را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{RProv}(x) \equiv (\exists y) (\text{Proof}(y, x) \wedge \forall w \leq y \neg \text{Proof}(w, \neg x))$$

پس $\mathcal{E}(x) \equiv \neg \text{RProv}(x)$. نقطه ثابت R برای $\mathcal{E}(x)$ می گوید که اگر من اثبات پذیر بودم آنگاه اثباتی کوچکتر برای نقیض من وجود داشت.

حال برای هر نظریه سازگار T می توان نشان داد که $T \not\vdash R$ و $T \not\vdash \neg R$.

زیرا اگر $T \vdash R$ پس $T \not\vdash \neg R$. پس $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg \text{Proof}(\bar{n}, \neg R)$ ولی برای m ای $T \vdash \text{Proof}(\bar{m}, R)$. پس $T \vdash \text{RProv}(R)$ و این تناقض است. زیرا $T \vdash R \leftrightarrow \neg \text{RProv}(R)$. همچنین اگر فرض کنیم $T \vdash \neg R$ پس $T \vdash \text{RProv}(R)$ نیز $T \not\vdash R$. پس داریم $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg \text{Proof}(\bar{n}, \neg R)$ و $\exists m T \vdash \text{Proof}(\bar{m}, R)$ و بنا به فرض خواهیم داشت: $T \vdash (\exists y) (\text{Proof}(y, R) \wedge \forall w \leq y \neg \text{Proof}(w, \neg R))$ بنابراین با توجه به مفروضات فوق به تناقض خواهیم رسید. $\square$

۴.۵ قضیه تارسکی

فرض کنید که یک فرمول خوش تعریف $\tau(x)$ وجود دارد که این حقیقت را توضیح می دهد که x عدد گودلی یک جمله درست می باشد». قرار دهید $\mathcal{E}(x) \equiv \neg \tau(x)$. وجود نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$ ، نشان می دهد که $\tau(x)$ کاری که قرار است انجام دهد را واقعاً انجام نمی دهد. نتیجه می گیریم، نظریه ای که در آن لم قطری برقرار است نمی تواند درستی جملات خودش را بیان کند.

می توان نشان داد که محمول درستی تعریف پذیر نیست. یعنی در زبان L_A فرمول $\tau(x)$

وجود ندارد که برای هر فرمول ϕ ، استلزام $\vdash \phi \longleftrightarrow \tau(\ulcorner \phi \urcorner)$ برقرار باشد: اگر چنان τ ای وجود داشت، پس $\neg\tau(x)$ نقطه ثابتی داشت مثل T که $\vdash T \longleftrightarrow \neg\tau(\ulcorner T \urcorner)$ و از طرفی باید داشته باشیم $\vdash T \longleftrightarrow \tau(\ulcorner T \urcorner)$ پس نتیجه می شود $\vdash T \longleftrightarrow \neg T$ و این یک تناقض است. $\square$

۵.۵ گزاره های پریخ

گزاره های درستی وجود دارند که اثباتهای طولانی دارند، اما حقیقت اثبات پذیریشان اثبات نسبتاً کوتاهی دارد. این نتایج شگفت انگیز درباره طول اثبات، در صفحه ۴۹۶ مقاله مشهور پریخ^۴ [۱۹] می توانند یافت شوند. نظریه سازگاری شامل حساب پئانو را در نظر بگیرید. ما با محمولات (روابط) زیر سرو کار خواهیم داشت:

• $\text{Prflen}(m, x)$ که در آن m طول اثبات جمله ای است که عدد گودلی آن x است. این رابطه تصمیم پذیر است، چون فقط یک تعداد متناهی از اثباتهای بطول m وجود دارند.

• $\text{Prov}(x) \equiv \exists y \text{ Proof}(y, x)$ یعنی اثباتی از یک جمله وجود دارد که عدد گودلی آن x است.

• $\mathcal{E}_n(x) \equiv \neg(\exists m < n, \text{Prflen}(m, x))$

با بکار بردن لم قطری برای $\mathcal{E}_n(x)$ ، نقطه ی ثابت $\mathcal{C}_n$ را بما می دهد بطوریکه

$$\vdash \mathcal{C}_n \longleftrightarrow \mathcal{E}_n(\ulcorner \mathcal{C}_n \urcorner) \equiv \neg(\exists m < n : \text{Prflen}(m, \ulcorner \mathcal{C}_n \urcorner))$$

به عبارت دیگر $\mathcal{C}_n$ می گوید: «من اثباتی کوچکتر از n ندارم».

اگر C_n غلط باشد، آنگاه اثبات کوچکتری از n برای C_n وجود دارد و در نتیجه، سیستم سازگار نیست.

به اثبات کوتاه زیر از $\text{Prov}(C_n)$ توجه نمایید :

(۱) اگر C_n هیچ اثباتی نداشته باشد، آنگاه C_n درست است.

(۲) اگر C_n درست باشد، می‌توانیم تمام اثباتهای بطول کمتر از n را بررسی نموده و C_n را اثبات کنیم.

(۳) از ۱ و ۲ داریم اگر C_n اثباتی نداشته باشد، پس می‌توانیم C_n را اثبات کنیم. یعنی

$$\neg \text{Prov}(C_n) \rightarrow \text{Prov}(C_n)$$

(۴) $\therefore \text{Prov}(C_n)$

این اثبات می‌تواند در حساب پئانو در اثبات کاملاً کوتاهی فرمول بندی شود. برعکس، n آزادانه می‌تواند بزرگ انتخاب شود. پس ما C_n ای را داریم که اثبات خیلی بلندی دارد اما حقیقت اثبات پذیر بودن C_n ، اثباتی کوتاه دارد.

□

۶.۵ پارادکس لُب

ثابت می‌کنیم که هر جمله‌ی منطقی درست است. نمادگذاری استاندارد برای عدد گودلی C عبارت است از $\ulcorner C \urcorner$. برعکس، اگر n عدد صحیحی باشد آنگاه wff متناظر با کد n را با $\ulcorner n \urcorner$ نمایش خواهیم داد. بوضوح داریم $\ulcorner \ulcorner C \urcorner \urcorner = C$.

فرض کنید A هر گزاره‌ای باشد. ثابت خواهیم نمود که آن همیشه درست است. با استفاده

از لم قطری روی

$$\mathcal{E}(x) \equiv \ulcorner x \urcorner \Rightarrow A$$

یک نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$ عبارتست از C ، به طوری که

$$\vdash C \longleftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner C \urcorner) \equiv (\ulcorner C \urcorner \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow A)$$

لذا C معادل با $A \Rightarrow C$. فرض کنیم C درست باشد، پس $C \Rightarrow A$ نیز درست خواهد بود. طبق قاعده وضع مقدم، A نیز باید درست باشد. بنابراین با فرض C ، A را ثابت کرده ایم. این دقیقاً مطلبی است که $C \Rightarrow A$ بیان می کند. از اینرو آن درست است، همانطور که معادل آن C درست است، و لذا A درست است.

این شبیه به یک پارادکس واقعی است. ظاهراً پارادکس به این دلیل بوجود می آید که ما محدودیتی روی wff های $\mathcal{E}(x)$ ، برای مجاز بودن به استفاده از لم قطری قائل نشده ایم. پارادکس لب مرتبط با پارادکس کوری است که نشان می دهد ما باید اصل انتزاع در اصل موضوعی نظریه مجموعه ها را محدود کنیم. در اینجا ما باید بروش مشابهی، لم قطری را محدود کنیم. محدود نمودن لم قطری ممکن است عجیب به نظر رسد زیرا اثبات ساختاری آن ظاهراً برای تمامی $\mathcal{E}(x)$ ها کاربرد دارد. اما باید همان طوری که اصل انتزاع را در نظریه مجموعه ها آشکارا محدود می کنیم، این کار را نیز انجام دهیم. دلیل واقعی حفظ این پارادکس این است که عمل $\ulcorner x \urcorner$ در این سیستم تعریف نشده است. از اینرو، ما مجاز به استفاده از آن در $\mathcal{E}(x)$ نیستیم. $\square$

اجازه دهید از بحث منطق به نظریه محاسبه پذیری رجوع کنیم. ما از زبان و مفهوم مرجع

[۴] بهره می گیریم. پس تابع بازگشتی با کد m را با ϕ_m نمایش می دهیم.

قضیه S_1^1 : برای تابع بازگشتی f ، تابع بازگشتی مقدماتی ρ وجود دارد به طوری که یک به یک بوده و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\phi_e(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_{\rho(e, \bar{x})}(\bar{y})$$

برهان: به [۷] رجوع شود.

لم : فرض کنید مجموعه‌ی S ، بازگشتی مقدماتی و تابع f محاسبه پذیر باشد، آنگاه تابع بازگشتی مقدماتی یک به یک g موجود است به طوری که

$$i) \quad y \in S \longrightarrow \phi_{g(y)}(x) = f(x)$$

$$ii) \quad y \notin S \longrightarrow \phi_{g(y)} \uparrow$$

برهان : به [۷] رجوع شود.

قضیه S_n^m : برای هر m و n تابع بازگشتی مقدماتی $(n+1)$ تایی S_n^m موجود است به طوری

که

$$\phi_e(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_{S_n^m(e, \bar{y})}(\bar{x})$$

برهان: به [۷] رجوع شود.

قضیه ۵ (قضیه بازگشت):

فرض کنید که $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ یک تابع محاسبه پذیر تام باشد. یک عضو n_0 در $\mathbb{N}$ موجود است

به طوری که $\phi_{h(n_0)} = \phi_{n_0}$.

برهان. فرض کنید f مجموعه‌ای از توابع محاسبه پذیر یک متغیره باشد. نگاشت $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$

را به صورت $f(m, n) \cong \phi_{\phi_n(m)}$ تعریف می‌کنیم. اگر $\phi_n(m)$ تعریف نشده باشد، آنگاه $f(m, n)$

نیز تعریف نشده است. با فرض اینکه عملگر $\Phi_h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ به صورت $\Phi_h(\phi_n) = \phi_{h(n)}$ تعریف

شده است، دیاگرام زیر را می سازیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \Phi_h \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & \mathcal{F} \end{array}$$

تابع g به صورت $g(m) = \phi_{h(\phi_m(m))}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه S_n^m ، تابع محاسبه پذیر تام $S(m)$ وجود دارد به طوری که $\phi_{h(\phi_m(m))} = \phi_{S(m)}$. چون S تام و محاسبه پذیر است، عدد t ای وجود دارد به طوری که $S(m) = \phi_t(m)$ و لذا g نمایش پذیر است زیرا $n_0 = \phi_{\phi_t(t)}$ در Φ_h از نقطه ثابتی $g(m) = \phi_{h(\phi_m(m))} = \phi_{S(m)} = \phi_{\phi_t(m)} = f(m, t)$ وجود دارد. چرا که:

$$\begin{aligned} \phi_{h(\phi_t(t))} &= \Phi_{h(\phi_t(t))} && \text{بنابر تعریف } \Phi_h \\ &= \Phi_h(f(t, t)) && \text{بنابر تعریف } f \\ &= g(t) && \text{بنابر تعریف } g \\ &= f(t, t) && \text{بنابر نمایش پذیری } g \\ &= \phi_{\phi_t(t)} && \text{بنابر تعریف } f \end{aligned}$$

□

۷.۵ قضیه رایس

هر ویژگی غیر بدیهی توابع محاسبه پذیر، تصمیم ناپذیر است. فرض کنید A یک زیر مجموعه‌ی محض ناتهی از $\mathcal{F}$ باشد، که مجموعه‌ای از تمام توابع محاسبه پذیر یک متغیره است. فرض کنید $A = \{x | \phi_x \in A\}$. نشان می‌دهیم A بازگشتی نیست. فرض کنید (فرض خلف) A بازگشتی باشد. بگیرید $a \in A$ و $b \notin A$ و تابع h را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{اگر } x \notin A \\ b & \text{اگر } x \in A. \end{cases}$$

پس داریم: « $x \in A$ اگر و تنها اگر $h(x) \notin A$ ». با استفاده از فرض، h محاسبه پذیر و تام است. از این رو با استفاده از قضیه بازگشت، یک عضو n_0 موجود است به طوری که $\phi_{h(n_0)} = \phi_{n_0}$. حال تناقض زیر را خواهیم داشت:

$$n_0 \in A \iff h(n_0) \notin A \quad \text{بنابر تعریف } h$$

$$\iff \phi_{h(n_0)} \notin A \quad \text{بنابر تعریف } A$$

$$\iff \phi_{n_0} \notin A \quad \text{بنابر قضیه بازگشت}$$

$$\iff n_0 \notin A \quad \text{بنابر تعریف } A$$

□

حال صورت دیگری از اثبات قضیه رایس را ارائه می‌نماییم:

برهان.

حالت اول) فرض کنید $\emptyset \notin A$ ، همچنین فرض کنید $\psi \in A$ ، طبق لم داریم:

$$i) y \in K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \in A$$

$$ii) y \notin K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \notin A$$

$$\therefore y \in K \longleftrightarrow g(y) \in A \implies K \leq_m A$$

از اینرو A بازگشتی نیست.

حالت دوم) فرض کنید $\emptyset \in A$ ، همچنین فرض کنید $\psi \in A$. طبق لم خواهیم داشت:

$$i) y \in K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \notin A$$

$$ii) y \notin K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \in A$$

$$\therefore y \in \bar{K} \longleftrightarrow g(y) \in A \implies \bar{K} \leq_m A$$

□

پس در این حالت نیز A بازگشتی نیست.

۸.۵ ماشین های خودمولد وان نیومن

یک ماشین خود مولد^۵، تابع محاسبه پذیری است که همواره خروجی آن توصیفاتش است. ممکن است به نظر ساختن چنین ماشین خودمولدی غیر ممکن باشد زیرا به منظور ساختن چنین ماشینی، ما نیاز داریم تا توصیفاتش را بدانیم و از اینرو از قبل راجع به ماشین اطلاعاتی داریم. در هر حال، با کاربرد ساده‌ی قضیه بازگشت ما چنین ماشینی بدست می‌آوریم.

منظور ما از توصیف یک ماشین می‌تواند عدد گودلی تابع محاسبه‌پذیری باشد که آن

ماشین محاسبه می‌کند. پس یک ماشین خودمولد، تابعی محاسبه پذیر با کد n مثل ϕ_n است به

قسمی که برای تمام ورودی های x ، $\phi_n(x) = n$.

self-reproducing machine⁵

فرض کنید $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابع تصویری محاسبه پذیر $f(y, x) = y$ باشد. با استفاده از قضیه S_n^m ، تابع محاسبه پذیر تام s موجود است به طوری که $\phi_{s(y)} = f(y, x) = y$. با استفاده از قضیه بازگشت، n ای موجود است به طوری که $\phi_{s(n)} = \phi_n$ پس خواهیم داشت

$$\phi_n(x) = \phi_{s(n)}(x) = f(n, x) = n$$

□

حال می خواهیم ماشین تورینگ بسازیم که صرفنظر از ورودی، توصیفش را در خروجی چاپ کند. این ماشین را $SELF$ نامیده و جهت تشریح آن از لم زیر استفاده می کنیم.

لم : تابع محاسبه پذیر $q : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ وجود دارد به طوری که روی ورودی w ، $q(w)$ توصیف ماشین تورینگ P_w بوده و w را در خروجی چاپ کند.

برهان.

قرار می دهیم $Q =$ روی ورودی w :

(الف) ماشین تورینگ P_w را بساز طوری که:

$$P_w = \langle \text{روی هر ورودی } w \rangle$$

(۱) ورودی را پاک کن.

(۲) w را روی نوار بنویس.

(۳) توقف کن.

(ب) $\langle P_w \rangle$ را در خروجی بنویس.

ماشین تورینگ $SELF$ از دو قسمت A و B تشکیل گردیده است. فرض می کنیم A و B دو زیر برنامه جدا هستند، که با هم $SELF$ را می سازند. هدف این است که $SELF$ در خروجی $\langle SELF \rangle$ را چاپ کند. ابتدا A اجرا می شود و به محض اتمام آن کنترل برنامه در اختیار B قرار می گیرد. عمل A چاپ نمودن توصیف B در خروجی است و عمل B چاپ توصیف A در

خروجی است. برای A از ماشین $P_{\langle B \rangle}$ که بوسیله $q(\langle B \rangle)$ توصیف می شود بهره می گیریم که نتیجه اعمال تابع q بر روی $\langle B \rangle$ است. پس A ، ماشین تورینگی است که $\langle B \rangle$ را در خروجی چاپ می کند. اما A, B را از روی خروجی که توسط A تولید می شود، محاسبه می کند. همان طوری که ملاحظه نمودیم $\langle A \rangle$ به صورت $q(\langle B \rangle)$ تعریف شد. حال اگر B بتواند $\langle B \rangle$ را بدست آورد، با اعمال q بر روی آن می تواند $\langle A \rangle$ را بدست آورد. اما B چگونه $\langle B \rangle$ را بدست می آورد؟ در واقع $\langle B \rangle$ همان محتویات نوار پس از پایان یافتن A می باشد. پس $B, q(\langle B \rangle) = \langle A \rangle$ را محاسبه می کند و با ترکیب خروجیها $\langle AB \rangle = \langle SELF \rangle$ روی نوار نوشته خواهد شد. پس اگر $SELF$ را اجرا کنیم، اعمال زیر انجام خواهد شد.

(۱) ابتدا A اجرا می شود و $\langle B \rangle$ را در خروجی می نویسد.

(۲) B شروع می شود و $\langle B \rangle$ را بعنوان ورودی از روی نوار می خواند.

(۳) $B, q(\langle B \rangle) = \langle A \rangle$ را محاسبه نموده و آن را با $\langle B \rangle$ ترکیب کرده و $\langle SELF \rangle$ حاصل می شود.

(۴) B توصیف بدست آمده را چاپ کرده و متوقف می شود.

قضیه بازگشتی، تکنیک بکار رفته در ساختن $SELF$ را توسعه می دهد به طوری که هر برنامه بتواند توصیفش را بدست آورده از آن در محاسباتش استفاده کند.

قضیه بازگشتی: فرض کنید T ماشین تورینگی است که تابع $t: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ را محاسبه

می کند. ماشین تورینگ R ای وجود دارد که تابع $r: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ را محاسبه می کند به طوری که

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w), w \text{ برای هر}$$

برهان.

همانند $SELF$ ، ماشین تورینگ R را از سه قسمت A, B و T می سازیم. A ماشین

تورینگ $P_{\langle BT \rangle}$ است که با $q(\langle BT \rangle)$ توصیف می شود. برای حفظ کردن ورودی w ، q را طوری

طراحی می کنیم که $P_{\langle BT \rangle}$ ، خروجیش را بعد از محتویات نوار بنویسد. بعد اجرای A ، نوار شامل

$\langle BT \rangle w$ خواهد بود. زیر برنامه ی B نوار را بررسی نموده و با اعمال q بر روی آن $\langle A \rangle$ را بدست می آورد و نیز با ترکیب نتیجه با $\langle BT \rangle$ ، $\langle ABT \rangle = \langle R \rangle$ بدست می آید و نهایتاً رشته ی $\langle R, w \rangle$ را روی نوار نوشته و کنترل برنامه را در اختیار T قرار می دهد. $\square$

قضیه بازگشتی ماشینهای تورینگی که می توانند توصیف خود را بدست آورند و در محاسبات خود از آن استفاده کنند، را توصیف می کند. برای مثال ممکن است ماشین M ، $\langle M \rangle$ را فقط در خروجی بنویسد که همان ماشین تورینگ $SELF$ خواهد بود یا ممکن است تعداد حالات $\langle M \rangle$ را بشمارد و یا در صورت امکان $\langle M \rangle$ را شبیه سازی کند. برای نشان دادن این مطلب، ماشین $SELF$ را با استفاده از قضیه بازگشتی شرح می دهیم.

$$SELF = \langle\langle \text{روی هر ورودی } w \rangle\rangle$$

(۱) با استفاده از قضیه بازگشتی توصیف خود را $\langle\langle SELF \rangle\rangle$ ، بگیر.

(۲) $\langle SELF \rangle$ را چاپ کن.

قضیه بازگشتی چگونگی ساختار بدست آوردن توصیف خود را نمایش می دهد. به منظور تولید ماشین $SELF$ ، نخست ماشین تورینگ T را ارائه می دهیم.

$$T = \langle\langle \text{روی ورودی } \langle M, w \rangle \rangle\rangle$$

(۱) $\langle M \rangle$ را چاپ کن.

ماشین تورینگ T ، توصیفی از یک ماشین تورینگ M و رشته w به عنوان ورودی را دریافت کرده و توصیف M را چاپ می کند. پس قضیه بازگشت نشان می دهد چگونه می توانیم یک ماشین تورینگ R را روی ورودی w بدست آوریم که نظیر T روی ورودی $\langle R, w \rangle$ عمل کند. بنابراین R توصیف R را چاپ می کند، دقیقاً آنچه که مستلزم ماشین $SELF$ است.

ویروس کامپیوتری، یک برنامه کامپیوتری است که به منظور انتشار خود در میان کامپیوترها طراحی شده است. ویروسهای کامپیوتری زمانی که به تنهایی بعنوان قسمتی از کد قرار می گیرند،

غیرفعالند اما زمانی که در کامپیوتر میزبان قرار می گیرند بدین ترتیب آن را آلوده می کنند. آنها می توانند کپی هایی از خودشان را به دیگر ماشین های قابل دسترس انتقال دهند. برنامه های صوتی و تصویری زیادی می توانند ویروس ها را از طریق اینترنت و یا حافظه های جانبی انتقال دهند. یک ویروس جهت انجام دادن وظیفه خودتکراری^۶ اولیه اش، دارای ساختار توصیف شده در برهان قضیه بازگشت است. برای توضیح بیشتر در این خصوص به مرجع [۲۶] رجوع شود.

self-replicaton^۶

فصل ۶

جمع بندی و طرح مسائل باز

در این فصل ما لیست وار به بیان برخی از موارد و مباحثی که در تعمیم و ادامه مباحث این پایان نامه در زمینه های مختلف ریاضی می توان پرداخت، اشاره می کنیم. ضمناً به عنوان نمونه صرفاً به شرح و بیان مختصر چند نمونه از این موارد می پردازیم.

قضیه اصلی کانتور، می تواند بیشتر تعمیم یابد، به طوری که حتی پدیده های دیگری نیز می توانند توسط این قضیه شامل شوند. مثلاً اگر دو مجموعه ی Y و Y' را داشته باشیم و یک تابع پوشا از Y به Y' وجود داشته باشد، چه روی خواهد داد؟ این قضیه درباره ی رابطه میان $f : T \times T \rightarrow Y$ و $f' : T \times T \rightarrow Y'$ چه می گوید؟ ما باید مفهوم تحویل یک پارادکس به پارادکسی دیگر را بدست آوریم.

بجای صحبت در خصوص مجموعه ها و توابع، شاید ساده تر است درباره ی ترتیب جزئی و نگاشت های حافظ ترتیب صحبت کنیم. با این تعمیم، ممکن است ما نه تنها قادر باشیم تا قضایای نقطه ی ثابت را بدست آوریم، بلکه کوچکترین نقطه ی ثابت را نیز داشته باشیم. قضایای نقطه ثابت ساده ی زیادی وجود دارند از جمله برای نگاشت های پیوسته cpo و دامنه های اسکات و تعریف کریپکی از درستی [۸] و قضیه کناستر-تارسکی.

باید توجه بیشتری را به پارادکس های ریچارد و لُب معطوف کنیم. اگر چه محدودیت هایشان را بیان نموده ایم، لیکن پارادکس ها حفظ می شوند. شاید آنها را درست فرمول بندی ننمودیم یا شاید مشکلات ذاتی در مورد این پارادکس ها وجود دارد.

قضایای نقطه ثابت زیادی در کل منطق و ریاضیات وجود دارد که از انواع توضیح داده شده در فصل ۴، نیستند. آیا می توانیم راجع به برخی از ویژگیهای قضایای نقطه ثابت که خودارجاعی اند، بحث نماییم؟

بنظر می رسد که مولفه ی کلیدی لم قطری، وجود یک تابع بازگشتی $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ است که

برای تمامی $B(x)$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$D(\ulcorner B(x) \urcorner) = \ulcorner B(\ulcorner B(x) \urcorner) \urcorner$$

بطور مشابه، به منظور داشتن قضیه بازگشت نیاز به قضیه S_n^m داریم. این دو ویژگی از سیستم ها، کلیدی برای این حقیقت اند که سیستم ها می توانند درباره ی خودشان صحبت کنند. آیا این دو ویژگی به هم مربوطند؟ سؤال مهمتر اینکه آیا می توانیم ویژگیهای کلیدی دیگری در سیستم ها بیابیم که خودارجاعی را ممکن سازد؟

در بخش مقدمه ی این پایان نامه در خصوص فقدان یک تابع پوشای $T \rightarrow Y^T$ بحث نمودیم و مطرح گردید که Y ممکن است بعنوان مقادیر درستی یا ویژگیهای اشیای T در نظر گرفته شود. آیا ما می توانیم ویژگی بهتری برای Y بیابیم؟ در فصل ۵ درباره ی تابع پوشای $Lind^1 \rightarrow (Lind^0)^{Lind^1}$ صحبت شد که $Lind^i$ در آن فرمول کلاسهای لیندنبام با i تا متغیر آزاد است. از چه نظر $Lind^0$ مقدار درستی یا ویژگیهای $Lind^1$ است؟ سپس ما به تابع پوشای $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ پرداختیم که در آن $\mathcal{F}$ مجموعه ای از توابع محاسبه پذیریکانی است. ما از این تابع پوشا برای اثبات قضیه ی بازگشت استفاده کردیم.

با ارائه نمونه های زیادی از قضایا، این زمینه را بطور وسیعی مورد بحث قرار دادیم. پدیده های پارادکسی و قضایای نقطه ثابت بیشتری وجود دارد که ما درباره ی آن صحبت نکرده ایم. برخی از آنها ممکن است برای طرح ما جوابگو باشند و برخی نه.

• پارادکس های معنایی زیادی وجود دارد که ما بحث نکردیم. همانطور که در فصل یک بیان نمودیم، پارادکس بری^۱ می خواهد تا به این جمله توجه کنید که «فرض کنید که x نخستین عددی است که نمی تواند بوسیله هیچ جمله ای با کمتر از ۲۰۰ کاراکتر توصیف شود.» ما چنین

Berry paradox¹

عددی را توصیف کردیم.

• مسأله کوروکودیل یک پارادکس قدیمی است که با زیرکی گمراه کننده ای یک پارادکس خودارجاعی است. یک کوروکودیل کودکی را می رباید و مادر کودک خواهان بازگشت کودک دلبندش است. کوروکودیل پاسخ می دهد که «کودکت را باز خواهم گرداند اگر و تنها اگر بدرستی حدس بزنی که من کودکت را باز خواهم گرداند یا نه؟» مادر با زیرکی پاسخ می دهد که او کودک را نگه خواهد داشت. یک کوروکودیل درستکار چه کاری انجام می دهد؟! کوروکودیل اگر کودک را نگهدارد و به مادرش بازگرداند در این صورت مادر به درستی پاسخ گفته است و بایستی کودک را به مادرش بازگرداند. همچنین اگر کودک را به مادرش بازگرداند، در این صورت مادر پاسخ درستی نداده و بایستی کودک را نگهدارد. و این تناقض است.

• عقیده بر این است که همه پارادکس ها از بین می روند اگر جمله خودارجاعی وجود نداشته باشد. پارادکس دروغگوی غیر خودارجاعی یابلو^۲ برای تأثیر بر این فرضیه فرمول بندی شده است. یک عبارت متوالی وجود دارد بطوریکه هیچ یک از آنها تا بحال به خودشان رجوع نکرده اند و با این وجود آنها هم درست و هم غلط اند. به دنباله زیر توجه می کنیم

$(S_i) : \text{بازای } (k > i), S_k \text{ غلط است}$

فرض کنید S_n برای یک n طبیعی درست باشد. پس S_{n+1} غلط است، چون S_n ادعای نادرستی همه S_k ها برای $k > n$ را می کند. با توجه به اینکه همه عبارات S_k برای $k > n + 1$ غلط اند، S_{n+1} درست است که یک تناقض است. بنابراین با مقایسه، S_n بازای تمامی n ها غلط است. این بدین معنی است که S_1 درست است و S_2 درست است و غیره. بار دیگر یک تناقض داریم.

^۲Yablo's Non-self-referential Liar's Paradox

- پارادکس معرفت شناختی برندن بروگر^۳ [۳] به وضعیتی توجه می‌کند که در آن «سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد دارد که سارا اعتقاد دارد که علی باور غلطی درباره سارا دارد.»
حال از خودتان پرسید : «آیا سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد غلطی درباره سارا دارد؟» با تفکر بیشتر می‌توانیم ملاحظه کنیم که این یک وضعیت پارادکسی است.
- پارادکس کوری، پارادکسی درباره منطق و نظریه مجموعه هاست که شباهت زیادی به پارادکس لُب دارد.
- تابع اکرم^۴ یک تابع بازگشتی مقدماتی نیست. اغلب این جمله شنیده می‌شود که تابع اکرم از قطری سازی توابع بازگشتی مقدماتی نتیجه شده است.
تابع اکرم یک تابع دو متغیره $A(n, x)$ است که محاسبه پذیر بوده ولی بازگشتی مقدماتی نیست.

$$A(0, x) = x + 1$$

$$A(n, x) = A(n - 1, 1)$$

$$A(n, x) = A(n - 1, A(n, x - 1))$$

می‌توان نشان داد که تابع قطری $A(x, x)$ ، تابع بازگشتی مقدماتی نیست و به هر تابع بازگشتی مقدماتی تسلط دارد. (ر.ک. [۱۲]) همچنین می‌توان نتیجه گرفت که روش استقرایی که برای تعریف $A(n, x)$ استفاده شد قویتر از بازگشتی مقدماتی است.

- نتیجه مشهور پاریس – هرینگتون^۵ بیان می‌کند که قضایای تعمیم یافته رمزی^۶ نمی‌توانند در

Brandenburger's Epistemic Paradox^۳

Ackermann^۴

Paris-Harrington^۵

Ramsey^۶

حساب پئانو اثبات شوند. کاناموری و مک آلون [۱۳] رابطه ای را با تابع اکرمین ایجاد کرده اند. همان طور که تابع اکرمین خارج از توابع بازگشتی مقدماتی قرار می گیرد. بنابراین قضیه تعمیم یافته رمزی نیز به طور قطری خارج از حساب پئانو قرار می گیرد. هر دوی اینها واقعاً بیانگر محدودیت سیستمی هستند.

نمونه های بسیار دیگری از قضیه نقطه ثابت وجود دارد که ممکن است در طرح ما گنجانده شوند.

• قضیه شکاف بورودین^۷ یک نوع قضیه نقطه ثابت در نظریه پیچیدگی است که ممکن است در خصوص طرح ما صادق باشد.

• مجدداً قضیه کناستر-تارسکی^۸ را درباره توابع یکنوا مابین ترتیب های جزئی یادآور می شویم. قضیه پر کاربرد دیگری نیز راجع به نقاط ثابت توابع پیوستار میان *cpo* ها وجود دارد.

• بعنوان آخرین مورد خودارجاعی، تمایل داریم که قضیه صدق کریپکی^۹ را یادآوری کنیم که او برای اجتناب از پارادکس های خودارجاعی استفاده کرد. آن ماهیتاً یک نوع قضیه نقطه ثابت می باشد. واقعاً جالب خواهد بود اگر بتوانیم این نظریه را با همان روشی که با پارادکس هایمان برخورد کردیم در زبان خودمان (نقاط ثابت و دیاگرام ها) فرمول بندی کنیم.

• قضیه نقطه ثابت براور^{۱۰} یا قضیه مقدار متوسط ساده.

• قضیه تعادل نش^{۱۱} و بسیاری از تعمیم های آن از نظریه بازی.

Borodin's Gap Theorem⁷

Knaster-Tarski⁸

kripke⁹

Brouwer¹⁰

Nash's equilibria¹¹

چندین قضیه از ریاضیات حقیقی وجود دارد که از طریق اثبات های قطری ثابت شده اند. ما ممکن است قادر به گنجاندن آنها در زبانمان باشیم.

• قضیه رسته بئر¹² درباره فضای متریک.

• قضیه موتل¹³ در نظریه توابع مختلط.

• قضیه اسکولی¹⁴ در توپولوژی.

• قضیه هلی¹⁵ درباره محدودیت های توزیع.

ایده های زیر مبهم تر از موارد بالا هستند:

• قضیه دوم ناتمامیت گودل درباره ی اثبات ناپذیری در سازگاری حساب در خودش. این قضیه معمولاً به عنوان تالی نخستین قضیه ناتمامیت ثابت می شود. به هر حال، کرایسل¹⁶، یک اثبات نظریه مدلی دارد که از روش قطری استفاده می کند. (ر.ک. ص ۸۶۰ [۲]) این اثبات بنظر می رسد که برای طرحمان جوابگو می باشد.

• بسیاری از مباحث نظریه اطلاعات الگوریتمی چایتین¹⁷ بنظر می رسد برای طرح ما مناسب باشند.

• ما در مورد نخستین قضیه ناتمامیت گودل بحث کردیم که با استفاده از زبان مقدماتی اثبات نمود حساب کاملاً نمی تواند درباره ی اثبات پذیری خودش صحبت کند. درباره قضیه ی ناتمامیت گودل چه معیاری وجود دارد؟ سیستم های ضعیف خاص، می توانند کاملاً از اثبات

Baire's Category¹²

Montel¹³

Ascoli¹⁴

Helly¹⁵

Kreisel¹⁶

Chaitin¹⁷

پذیری خودشان صحبت کنند. آیا این قضیه می تواند به عنوان برخی از انواع قضایای نقطه ثابت بیان شود؟

مراجع

- [1] T. BAKER, and J. GILL, and R. SOLOVAY, Relativizations of the $P=?NP$ question, Siam Journal on Computing, vol. 4 (1975), no. 4, pp. 431-442.
- [2] J. BARWISE (editor), Handbook of mathematical logic, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 90.
- [3] A. BRANDENBURGER, The power of paradox, Int Journal of Game Theory, vol. 35 (2007), no. 3, pp. 465-492.
- [4] N. CUTLAND, Computability, An introduction to recursive function theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [5] M. CLARK, Paradoxes from A to Z, second ed., Routledge, NY, 2007.
- [6] G. CHAITIN, The Berry paradox, Complexity, vol. 1 (1995), no. 1, pp. 26-30.

-
- [7] H. B. ENDERTON, Computability theory, Lecture Notes (2009), available at <http://www.math.ucla.edu/~hbe/comp/>.
- [8] M. FITTING, Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 27 (1986), no. 1, pp. 75-88.
- [9] A. HELLER, An existence theorem for recursion categories, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 55 (1990), no. 1, pp. 1252-1268.
- [10] J. E. HOPCROFT, and J. D. ULLMAN, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley Series in computer Science, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979.
- [11] H. HUWIG, and A. POIGNE, A note on inconsistencies caused by fixpoints in a Cartesian closed category, *Theoretical Computer Science*, vol. 73 (1990), no. 1, pp. 101-112.
- [12] S. HEDMAN, A First Course in Logic, second ed., Oxford University Press, NY, 2006.
- [13] A. KANAMORI, and K. MCALOON, On Gödel incompleteness and finite combinatorics, *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 33 (1987), no. 1, pp. 23-41.
- [14] S. LAVINE, Understanding the infinite, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1994.

- [15] F. W. LAWVERE, Diagonal arguments and cartesian closed categories, Category theory, homology theory and their applications, Springer, Berlin, 1969, pp. 134-145.
- [16] F. W. LAWVERE, and R. ROSEBRUGH, Sets for mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [17] F. W. LAWVERE, and S. H. SCHANUEL, Conceptual mathematics, A first introduction to categories, With the assistance of Emilio Faro, Fatima Fenaroli and Dani Lawvere, Buffalo Workshop Press, Buffalo, NY, 1991.
- [18] S. MAC LANE, Categories for the working mathematician, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol.5, Springer-Verlage, New York, 1998.
- [19] Y. I. MANIN, Classical computing, qantum computing, and Shor's factoring algorithm, Asterisque, (2000), no. 266, pp. 375-404, Seminaire Bourbaki, vol. 1998/99.
- [20] E. MENDELSON, Introduction to mathematical logic, fourth ed. Chapman Hall, London, 1997.
- [21] P. S. MULRY, Categorical fixed point semantics, Theoretical Computer Science, vol. 70 (1990), no. 1, pp. 85-97.
- [22] R. PARIKH, Existence and feasibility in arithmetic, The Journal of Symbolic Logic, vol. 36 (1971), pp. 494-508.

- [23] D. PAVLOVIC, On the sructure of paradoxes, Archive for Mathematical Logic, vol. 31 (1992), no. 6, pp. 397-406.
- [24] A. M. PITTS, and P. TAYLOR, A note on Russell's paradox in locally Cartesian closed categories, Studia Logica, vol. 48 (1989), no. 3, pp. 377-387.
- [25] R. RUCKER, Infinity and the mind: The science and philosophy of the infinite, Birkhauser, Boston, Mass. , 1982.
- [26] M. SIPSER, Introduction to the theory of computation, second ed., Thomson, Boston, 2006.
- [27] N. S. YANOFSKY, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulletine of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386.

[۲۸] ضیاء موحد، از ارسطو تا گودل، مجموعه مقاله های فلسفی - منطقی، انتشارات هرمس، ۱۳۸۲.

واژه‌نامه‌ی تخصصی فارسی به انگلیسی

Provability	اثبات پذیری
Truth-Values	ارزش درستی
Pedagogical	آموزشی
Deal with	بحث کردن
Infinite	بی نهایت
Complexity	پیچیدگی
Degenerate	تباهیده
Definability	تعریف پذیری
Paradox	تناقض نما
Universal	جهانی
Self-Referential	خودارجاعی
Self-Reproducing	خودمولد
Heterological	خود نامصداق
Truthfulness	راستگویی
Category	رسته
Enumeration	شمارش

Explicitly	صریحاً
Formalism	صوری سازی
Statement	عبارت
Contrapositive	عکس نقیض
Impredicable	غیر قابل استناد
Diagonal	قطری
Deterministic	قطعی
Collection	گردایه
Counter example	مثال نقض
Disjoint	مجزا
Computability	محاسبه پذیری
Halting Problem	مسأله توقف
Characteristic	مشخصه
Semantics	معنایی
Incompleteness	ناتمامیت
Defective	نارسا
Inconsistent	ناسازگار
Negation	نفی
Fixed Pionts	نقاط ثابت
Equivalent	هم ارز

واژه‌نامه‌ی تخصصی انگلیسی به فارسی

Category	رسته
Characteristic	مشخصه
Collection	گردایه
Complexity	پیچیدگی
Computability	محاسبه پذیری
Contrapositive	عکس نقیض
Counter example	مثال نقض
Definability	تعریف پذیری
Degenerate	تباهیده
Deterministic	قطعی
Diagonal	قطری
Deal with	بحث کردن
Defective	نارسا
Disjoint	مجزا
Enumeration	شمارش
Equivalent	هم ارز

Explicitly	صریحاً
Fixed Pionts	نقاط ثابت
Formalism	صورتگرایی، صوری سازی
Halting Problem	مسأله توقف
Heterological	خود نامصداق
Impredicable	غیر قابل استناد
Incompleteness	ناتمامیت
Inconsistent	ناسازگار
Infinite	بی نهایت
Negation	نفی
Paradox	تناقض نما، دروغ‌نما
Pedagogical	آموزشی
Provability	اثبات پذیری
Self-Referential	خودارجاعی
Self-Reproducing	خودمولد
Semantics	معنایی
Statement	عبارت
Truth-Values	ارزش درستی
Truthfulness	راستگویی، درست‌نمایی
Universal	جهانی

Surname: Abedini		Name: Mahdi	
Title: A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points			
Supervisor: S. Salehi			
Advisor: J. S. Eivazloo			
Degree: Master of Science		Major: Pure Mathematics	
Field: Mathematical Logic		University: Tabriz	
Faculty: Mathematical Sciences	Graduation Date: 2010	Number of Pages: 93	
Keywords: Self-Referential Paradoxes; Incompleteness; Fixed Points			
Abstract This thesis is based on the following paper: N. S. YANOFKY, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386. In 1906 Bertrand Russell published a paper in which he showed that all known set-theoretic paradoxes had a common form. In 1969 F. W. Lawvere used the language of category theory to achieve a radically different, and deeper, unification, one embracing not only the set-theoretic paradoxes but incompleteness phenomena as well. Lawvere showed how Cartesian closed categories can be used to give a common form to Cantor's theorem concerning the size of power sets, Russell's paradox, Tarski's undefinability of truth and Gödel's first incompleteness theorem. In the present thesis, which is of a usefully expository character, Lawvere's ideas are presented and extended using straightforward set-theoretic language. It is shown how self-referential paradoxes, incompleteness, and fixed-point theorems all emerge from a single generalized form of Cantor's theorem. We also have extended Lawvere's analysis to embrace the Liar paradox, the paradoxes of Grelling and Richard, Turing's halting problem, an oracle version of the P=?NP problem, time travel paradoxes, Parikh sentences, Löb's paradox, and Rice's theorem.			



University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

A DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN
PURE MATHEMATICS

A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points

Supervisor

S. Salehi

Advisor

J. S. Eivazloo

by

© Mahdi Abedini

2010